This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Math 3609.07.11

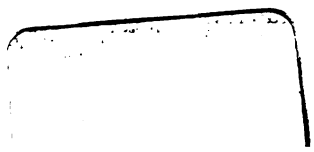
SCIENCE CENTER LIBRARY

FROM THE BEQUEST OF

GEORGE HAYWARD, M.D.,

OF BOSTON,

(Class of 1809).



Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

NOVA ACTA REGIÆ SOCIETATIS SCIENTIARUM UPSALIENSIS.

SER. IV. VOL. 1. N. 8.

UEBER DIE HAUPTEIGENSCHAFTEN

DERJENIGEN

E. 507

ANALYTISCHEN FUNCTIONEN EINES ARGUMENTS,

WELCHE ADDITIONSTHEOREME BESITZEN

VON

M. FALK.

(Mitgetheilt der Königl. Societät der Wissenschaften zu Upsala am 1 Febr. 1907).

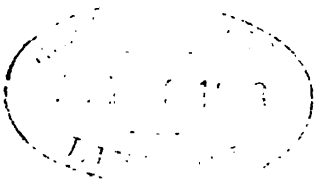
UPSALA 1907

AKADEMISCHE BUCHDRUCKEREI

EDV. BERLING.

Digitized by Google

~~Math 3709.07~~
Math 3609.07.11



Digitized by Google

Vorbemerkung.

Die Vorlesungen über elliptische Functionen, welche WEIERSTRASS im Sommersemester 1885 an der Universität Berlin hielt, sind meines Wissens seine letzten über diesen Gegenstand. Man darf deshalb wohl annehmen, dass dieselben eben diejenige Abfassung ausmachen, die er seinen genialen Untersuchungen über jene Functionen endgültig hat geben wollen. Wenn dem so ist, so muss nur um so mehr bedauert werden, dass die Herausgabe seiner Vorlesungen nicht allein über elliptische, sondern auch über analytische Functionen schon so lange auf sich warten lässt. Denn der Werth und die Bedeutung der ihm eigenen Functionen und Lehrsätze können erst dann in voller Klarheit zum Vorschein kommen und gehörig gewürdigt werden, wenn diese Functionen und Lehrsätze in dem ihnen gebührenden Rahmen, d. h. im Lichte seiner Theorie der analytischen Functionen dargestellt und betrachtet werden. Aber sogar schon von nur rein formalem Gesichtspunkte aus ist die Herausgabe der genannten Vorlesungen kaum minder wünschenswerth; denn sie bilden ein Gedankengebäude von fast alleinstehender logischer Strenge, Homogeneität und durchsichtiger Klarheit, wo alles mit den einfachsten — also auch den für die Untersuchungen natürlichsten und ihnen besonders angemessenen — Mitteln hergeleitet wird, d. h. sie bilden ein wissenschaftliches Ganzes, das auch den höchsten Ausprüchen auf systematische Einheitlichkeit gerecht ist, sich mit gewissenhafter Sorgfalt bestrebt, jede Zuhilfenahme fremder Beweisgründe zu vermeiden, und folglich als ein wahres Muster von wissenschaftlicher Leistung aufgestellt werden kann.

Die theoretische Entwickelung, welche WEIERSTRASS in den oben genannten Vorlesungen über elliptische Functionen *vollständig zum Abschluss* geführt hat, kann kurz bezeichnet werden als die Theorie derjenigen mit einem algebraischen Additionstheoreme versehenen ein-

Digitized by Google

deutigen analytischen Functionen, welche überall im Endlichen von *rationalem* Charakter sind. Es kamen allerdings in jenen Vorlesungen — und zwar schon in einer der ersten — auch noch einige allgemeinere Untersuchungen über analytische Functionen eines Arguments, die ein algebraisches Additionstheorem besitzen, vor; aber diese Untersuchungen, die übrigens von der beschränkenden Voraussetzung ausgingen, dass die Functionen sich an der Nullstelle des Argumentes regulär verhalten, wurden nur theilweise vollführt, wie ich in der Abtheilung 3 des hier folgenden Aufsatzes näher darzulegen versucht habe. Es wurde also unter Anderem dort nicht dargethan, dass jede mit einem algebraischen Additionstheoreme versehene *eindeutige* analytische Function eines Arguments nothwendig überall im Endlichen von *rationalem* Charakter ist.

Dass ich in den Vorlesungen über elliptische Functionen, die ich im Jahre 1903 an der hiesigen Universität hielt, mir das Ziel setzen musste, meine Zuhörer mit dem Inhalte und der Darstellungsart jener WEIERSTRASS'schen Vorlesungen vertraut zu machen, ist selbstredend nur eine Folge des oben Gesagten. Da ich aber zugleich auch noch die allgemeinen Sätze über diejenigen analytischen Functionen eines Arguments, welche mit einem algebraischen Additionstheoreme begabt sind, ausführlich auseinandersetzen wollte — natürlich ohne von der genannten WEIERSTRASS'schen Darstellungsart abweichen zu müssen —, so nahm ich jene allgemeinen Untersuchungen erst dann vor, als der Beweis des Satzes gegeben worden war, dass die nothwendige und ausreichende Bedingung dafür, dass eine *eindeutige* analytische Function $\varphi(u)$, die überall im Endlichen von rationalem Charakter ist, ein algebraisches Additionstheorem besitzt, darin besteht, dass sie eine *rationale* Function entweder von u selbst oder von einer Exponentialfunction $e^{\frac{u\pi i}{\omega}}$ oder von einer Function $\wp(u)$ und ihrer ersten Ableitung $\wp'(u)$ ist.

So weit gekommen, trug ich dann — im Herbstsemester 1903 — den Inhalt des hier folgenden Aufsatzes vor, wobei ich — um so wenig als möglich vorauszusetzen zu brauchen — zunächst als Vorbereitung einige nöthige Sätze über diejenigen analytischen Functionen eines Arguments gab, die in einem angegebenen Bereiche von *algebraischem* Charakter sind, und dann schliesslich die Hauptaufgabe in Angriff nahm, wobei es mir also, wie gesagt, als vor Allem massgebend obliegen musste, den WEIERSTRASS'schen Gedankengang so genau,

Digitized by Google

wie es mir überhaupt möglich war, inne zu halten und mich daher zu bestreben, erst die in den genannten WEIERSTRASS'schen Vorlesungen gegebenen Untersuchungen von der Annahme, dass $u = 0$ für $\varphi(u)$ eine *reguläre* Stelle sein sollte, zu befreien und dann diese Untersuchungen zum Abschluss zu bringen.

Erst nachdem ich die hier unten folgende deutsche Uebersetzung meines Aufsatzes schon vollendet hatte, ist es zu meiner Kenntniss gelangt, dass — im Sommer des Jahres 1905 — die hier behandelte Aufgabe in einer Doctordissertation[1] an der Universität Berlin zum Gegenstand der Untersuchung gemacht worden ist, welche Dissertation ich mir jetzt erst habe verschaffen können. Und mit regem Interesse habe ich dann von den Untersuchungen des Verfassers Kenntniss genommen. Wenn ich — obgleich diese Abhandlung schon vor etwa anderthalb Jahren veröffentlicht worden ist — mich doch erkühne, meinen Aufsatz dem Druck zu übergeben, so geschieht dies aus dem Grunde, weil unsre Aufsätze nicht nur der Untersuchungsart und dem Zwecke, sondern auch dem Inhalte nach in mehreren Hinsichten von einander verschieden sind, weshalb ich auch gern hoffen möchte, dass der meinige nicht als jegliches Interesses entbehrend befunden werde.

Januar 1907.

---

[1] Ueber diejenigen analytischen Functionen eines Arguments, welche ein algebraisches Additionstheorem besitzen. Inangural-Dissertation zur Erlangung der Doktorwürde von PAUL KOEBE.

Digitized by Google

I.

Functionen von algebraischem Charakter.

Für die Untersuchungen, die wir über diejenigen analytischen Functionen eines Arguments, welche Additionstheoreme besitzen, unten anstellen wollen, haben wir einige Sätze nöthig, welche Functionen betreffen, die in einem angegebenen Bereiche von algebraischem Charakter sind. Obgleich diese Sätze wohl als bekannt angenommen werden könnten, wollen wir sie doch hier auseinandersetzen, nämlich so, wie sie uns am besten nützlich zu werden scheinen.

Wir erinnern zunächst an die bekannte Definition:

A. *Eine Function:*

$$z = \varphi(u), \tag{1}$$

welche einer irreductiblen Gleichung:

$$p_0(u)z^\lambda + p_1(u)z^{\lambda-1} + \ldots + p_{\lambda-1}(u)z + p_\lambda(u) = 0 \tag{2}$$

Genüge leistet, wo die Coefficienten $p(u)$ ***ganze*** *Functionen von u sind, nennt man eine* ***Function von algebraischem Charakter*** *im* ***eigentlichen*** *Sinne des Wortes.*

Die Vorschrift, dass die Gleichung (2) irreductibel sein soll, ist hier so zu verstehen, dass ihre linke Seite in Factoren von *derselben* Beschaffenheit nicht zerlegbar sein darf.

Der obigen Definition gegenüber stellen wir noch die folgende:

B. *Wenn eine Function* (1) *einer Gleichung* (2) *genügt, deren Coefficienten $p(u)$ gewöhnliche Potenzreihen von u sind, die im Bereiche:*

$$|u| \leq R_1, \tag{3}$$

wo R_1 eine ***endliche*** *reelle positive Zahl bedeutet, convergieren, und wenn die Gleichung* (2) *in diesem Bereiche*

Digitized by Google

irreductibel** ist, so ist die Function **im Bereiche** (3) **von algebraischem Charakter. — Der Einfachheit halber sei hier angenommen, dass *die Grösse R_1 um ein beliebig Weniges kleiner ist als der kleinste von den wahren Convergenzradien der einzelnen Potenzreihen $p(u)$.*

In diesen Definitionen dürfen wir ferner annehmen, dass *im betreffenden Bereiche die Coefficienten $p(u)$ nirgends **gleichzeitig** den Werth Null annehmen* — also in $\mathfrak{A}$ für *keinen endlichen*, in $\mathfrak{B}$ für *keinen* Werth von u, *dessen absoluter Betrag* $\leqq R_1$ *ist.*

Betrachten wir zunächst den Fall $\mathfrak{A}$. Die *allen* den Functionen $p(u)$ *gemeinsamen* Nullstellen — jede genau so oft gerechnet, als ihre *kleinste* Ordnungszahl in Bezug auf die einzelnen Functionen $p(u)$ angiebt — besitzen offenbar die Eigenschaft, dass eine ganze Function $G(u)$ gebildet werden kann, die dieselben zu ihren *sämmtlichen* Nullstellen hat[1]. Man sieht dann unmittelbar ein, dass auch jeder *Quotient:*

$$\frac{p(u)}{G(u)}$$

eine *ganze* Function von u ist. Dividiert man daher die Coefficienten in der Gleichung (2)' durch $G(u)$, so geht also eine Gleichung von derselben Beschaffenheit hervor, wo aber jetzt für keinen endlichen Werth von u sämmtliche Coefficienten mehr verschwinden können.

Der Fall $\mathfrak{B}$ ist noch einfacher, da alsdann im Bereiche (3) keine der Functionen $p(u)$ unendlich viele Nullstellen haben kann. Man kann daher eine ganze — hier sogar rationale — Function $G(u)$ bilden, welche, wie oben benutzt, der Gleichung (2) die gewünschte Eigenschaft ertheilt.

In der Gleichung (2) kann man füglich die Zahl λ den *Mehrdeutigkeitsgrad* der Functionsbestimmung nennen. Da man für $\lambda = 1$ das Resultat:

$$z = -\frac{p_1(u)}{p_0(u)}$$

erhält, so haben wir zunächst den evidenten Satz:

C. *Wenn eine Functionsbestimmung in einem gewissen Bereiche gleichzeitig von **algebraischem** Charakter und vom **ersten** Mehrdeutigkeitsgrade ist, so ist sie daselbst von **rationalem** Charakter.*

[1] WEIERSTRASS, Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen. Art. 2.

Digitized by Google

Wenn dagegen $\lambda > 1$ ist, so ergiebt die Gleichung (2) im betreffenden Bereiche eine λ-fache Functionsbestimmung. Alsdann ist es offenbar möglich, dass es Werthe von u geben kann, welche die Eigenschaft besitzen, dass — wenn $u = u_0$ einen solchen Werth bezeichnet — mindestens zwei Werthe von z für $u = u_0$ zusammenfallen. *Einen solchen Werth von u* wollen wir eine *Stelle der Wiederholung* für die Functionsbestimmung nennen.

Da, der Annahme nach, die Gleichung (2) im fraglichen Gebiete irreductibel ist, so kann ihre Discriminante nicht an allen Stellen des Gebietes verschwinden. Da andererseits diese Discriminante eine ganze rationale Function der Coefficienten $p(u)$ und folglich eine im ganzen Gebiete convergierende Potenzreihe von u ist, so kann sie in keinem, ganz im Endlichen liegenden Theile dieses Gebietes für unendlich viele Werthe von u verschwinden. Genau dasselbe gilt auch von $p_0(u)$.

Da ferner nur die Nullstellen der Discriminante Stellen der Wiederholung, und nur die Nullstellen von $p_0(u)$ Unendlichkeitstellen für die Functionsbestimmung sein können, so haben wir also den Satz:

> **D.** *In jedem,* ***ganz im Endlichen*** *liegenden Theile des Gebietes, worin z durch eine Gleichung* (2) *als Function von* ***algebraischem*** *Charakter definiert ist, können weder* ***Stellen der Wiederholung*** *noch* ***Unendlichkeitsstellen*** *in* ***unendlicher*** *Anzahl vorkommen.*

Ueber die Beschaffenheit der im Endlichen liegenden *singulären* Stellen, die bei einer Function von algebraischem Charakter möglich sind, giebt uns folgender Satz Aufschluss.

> **E.** *Jede* ***Stelle der Wiederholung*** *ist schon deshalb als eine singuläre zu bezeichnen, weil dort mehrere Functionsbestimmungen zusammenfallen. Wenn $u = u_0$ eine solche Stelle und $z = z_0$ der entsprechende mehrfache Werth der Function ist, so sind für u in der Nähe von u_0 diejenigen Werthe von z, welche für $u = u_0$ die Grösse z_0 zum Grenzwerthe haben, durch eine Gleichung von der Form* $(\lambda \geqq \mu > 1)$:
>
> $$(z - z_0)^\mu + f_1 . (z - z_0)^{\mu-1} + \ldots + f_\mu = 0 \cdot \qquad (4)$$
>
> *gegeben, wo $f_1, \ldots, f_\mu$ in einer gewissen Umgebung der Stelle $u = u_0$ convergierende gewöhnliche Potenzreihen von*

Digitized by Google

$(u - u_0)$ ohne constantes Glied bezeichnen, und, wenn $z_0 = \infty$ ist, $(z - z_0)$ wie gewöhnlich durch $\frac{1}{z}$ zu ersetzen ist.

Jede ***andere singuläre*** *Stelle ist eine gewöhnliche* ***ausserwesentlich*** *singuläre, und auch solche können in einem* ***ganz im Endlichen*** *liegenden Theile des Bereiches nur in* ***endlicher*** *Anzahl vorkommen.*

Da die Definition $\mathfrak{A}$ in der Definition $\mathfrak{B}$ enthalten ist, wenn man annimmt, dass es für die Gleichung (2) erlaubt ist, die Grösse R_1 in der Bedingung (3) beliebig gross zu wählen, ohne dass der Grad der definierenden Gleichung (2) ins Unendliche wächst, so können wir diesen Satz mit einem Male für beide Definitionen folgendermassen beweisen, wenn selbstverständlich noch vorausgesetzt wird, dass im Falle $\mathfrak{A}$ die Coefficienten $p(u)$ von gemeinsamen Nullstellen *vollständig* frei oder befreit worden sind.

Es sei $u = u_0$ eine beliebige Stelle des Bereiches (3) und $z = z_0$ eine Wurzel der Gleichung:

$$p_0(u_0)z^\lambda + p_1(u_0)z^{\lambda-1} + \ldots + p_{\lambda-1}(u_0)z + p_\lambda(u_0) = 0\,, \qquad (5)$$

die für $u = u_0$ aus (2) hervorgeht. Alsdann müssen wir zwei Fälle unterscheiden, nämlich

1) wenn z_0 einen *endlichen* und 2) wenn z_0 einen *unendlichen* Werth hat.

1) Ist der Werth von z_0 endlich, so setzen wir in (2):

$$u = u_0 + v\,, \quad z = z_0 + t$$

unter der Voraussetzung, dass auch $u_0 + v$ dem gemeinsamen Convergenzbereiche der Potenzreihen $p(u)$ angehört, und wollen diejenigen Werthe von t suchen, welche der erhaltenen Gleichung genügen und sich der Grenze Null für unendlich klein werdendes v nähern. Um der Untersuchung eine einfachere Form zu geben, bezeichnen wir die linke Seite von (2) durch

$$f(u\,,\ z)\,,$$

wodurch die zwischen v und t erhaltene Gleichung die Gestalt:

$$f(u_0 + v\,,\ z_0 + t) = 0 \qquad (6)$$

annimmt. Da ferner $z = z_0$ Wurzel von (5) ist, so hat man ebenfalls:

$$f(u_0\,,\ z_0) = 0\,. \qquad (7)$$

Digitized by Google

Führen wir noch die Bezeichnungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^\mu f(u, z)}{\partial z^\mu} &= f^{(\mu)}(u, z), \\ f'(u_0, z_0) = C_1, f''(u_0, z_0) &= C_2, \ldots, f^{(\lambda)}(u_0, z_0) = C_\lambda \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

ein, so ist zunächst klar, dass die Grössen C nicht alle gleich Null sein können, weil sonst, der Voraussetzung zuwider, folgen würde, dass $u = u_0$ für die Functionen $p(u)$ eine gemeinsame Nullstelle wäre.

Entwickeln wir in der Gleichung (6) die linke Seite nach Potenzen von t und ziehen dann die entsprechenden Seiten der Gleichung (7) von ihr ab, so erhalten wir:

$$f(u_0 + v, z_0) - f(u_0, z_0) + f'(u_0 + v, z_0)\, t + f''(u_0 + v, z_0)\, \frac{t^2}{2} + \ldots$$

$$+ f^{\lambda)}(u_0 + v, z_0)\, \frac{t^\lambda}{\lambda!} = 0, \quad (9)$$

wo die linke Seite offenbar eine gewöhnliche Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(v, t)$$

von den beiden Veränderlichen v, t ohne constantes Glied ist, die für alle dem absoluten Betrage nach hinlänglich kleine Werthe von v convergiert. Die von v unabhängigen Glieder dieser Reihe bilden eine Summe $\mathfrak{P}(0, t)$, welche den Werth:

$$C_1 t + C_2 \frac{t^2}{2} + \ldots + C_\lambda \frac{t^\lambda}{\lambda!} \quad (10)$$

hat und folglich nicht für alle Werthe von t — »unabhängig von t» — verschwindet.

Wir können also auf (9) den WEIERSTRASS'schen »Vorbereitungssatz»[1] anwenden, und zwar ohne neue Veränderliche einzuführen zu brauchen, was folgende Resultate ergiebt.

α) Wenn C_1 von Null verschieden ist, so giebt es eine und nur eine Bestimmung von t d. h. von $z - z_0$, welche die Beschaffenheit hat, dass t unendlich klein wird für unendlich kleines $v = u - u_0$, und diese Bestimmung hat die Gestalt:

$$z = z_0 + \mathfrak{P}(u - u_0), \quad (11)$$

[1] WEIERSTRASS, Einige auf die Theorie der analytischen Functionen mehrerer Veränderlichen sich beziehende Sätze, Art. 1.

Digitized by Google

wo $\mathfrak{P}(v)$ eine gewöhnliche Potenzreihe von v ohne constantes Glied ist. Für *diese* Functionsbestimmung ist folglich $u = u_0$ eine *reguläre* Stelle, und *dies trifft also stets ein,* wenn $z = z_0$, wo z_0 *endlich* ist, eine *einfache* Wurzel der Gleichung (5) ist.

β) Wenn dagegen $C_1 = 0$ ist, so reduciert sich die Summe (10) auf:

$$C_\mu \frac{t^\mu}{\mu!} + \ldots + C_\lambda \frac{t^\lambda}{\lambda!},$$

wo

$$\lambda \geq \mu > 1 \text{ und } C_\mu \neq 0$$

ist. In diesem Falle kann man die Gleichung (9) auf die Form:

$$C_\mu \frac{t^\mu}{\mu!} + \ldots + C_\lambda \frac{t^\lambda}{\lambda!} + \bar{\mathfrak{P}}(v, t) = 0$$

bringen, wo $\bar{\mathfrak{P}}(v, t)$ eine gewöhnliche Potenzreihe von v, deren Coefficienten ganze rationale Functionen von t höchstens vom λ^{ten} Grade sind, und

$$\bar{\mathfrak{P}}(0, t) = 0$$

ist. Für diesen Fall ergiebt sich aus dem »Vorbereitungssatze», dass es μ — dem Satze $\mathfrak{D}$ zufolge *verschiedene* — *Bestimmungen von* z giebt, welche für unendlich klein werdendes v sich der Grenze z_0 nähern, und dass diese Werthe von z die Wurzeln einer Gleichung:

$$(z - z_0)^\mu + f_1(z - z_0)^{\mu-1} + \ldots + f_\mu = 0 \qquad (12)$$

sind, wo $f_1, \ldots, f_\mu$ gewöhnliche Potenzreihen von $(u - u_0)$ ohne constantes Glied bezeichnen. In diesem Falle ist also $u = u_0$ für die Function z eine *Stelle der Wiederholung,* wobei jedoch nicht ausgeschlossen ist, dass in (12) ein Resultat von der Form (11), d. h. eine *specielle* Functionsbestimmung mit enthalten sein kann, für welche $u = u_0$ eine *reguläre* Stelle ist.

2) Es erübrigt nur noch den Fall zu behandeln, wo z_0 *unendlich* ist, welchen wir auf den Vorigen durch die einfache Substitution:

$$z' = \frac{1}{z} \qquad (13)$$

reducieren, wobei also die Annahme

$$z' = 0 \qquad (14)$$

Digitized by Google

für $u = u_0$ zu machen ist. Die Definitionsgleichung (2) nimmt also hier die Gestalt:

$$p_\lambda(u)z'^\lambda + p_{\lambda-1}(u)z'^{\lambda-1} + \ldots + p_1(u)z' + p_0(u) = 0 \qquad (15)$$

an, wo offenbar $p_0(u)$ die Eigenschaft

$$p_0(u_0) = 0$$

haben muss, da (15) für $u = u_0$ durch (14) befriedigt sein soll.

Bezeichnen wir die linke Seite von (15) durch $\bar{f}(u, z')$, so erhalten wir unmittelbar aus dem schon behandelten Falle die hier erzielten Resultate, nämlich:

γ) Wenn $z' = 0$ eine *einfache* Wurzel der Gleichung

$$\bar{f}(u_0, z') = 0 \qquad (16)$$

ist, so hat man nach (11)

$$z' = \mathfrak{P}(u - u_0),$$

wo $\mathfrak{P}(v)$ kein constantes Glied enthält, und folglich

$$z = (u - u_0)^{-k} \cdot \bar{\mathfrak{P}}(u - u_0), \qquad (17)$$

wo k eine ganze positive Zahl und $\bar{\mathfrak{P}}(v)$ eine gewöhnliche Potenzreihe ist, die für $v = 0$ *nicht* verschwindet. Also

Wenn für $u = u_0$ die Gleichung (2) eine **einfache** *unendliche Wurzel hat, so ist für die entsprechende Functionsbestimmung z die Stelle $u = u_0$ eine* **ausserwesentlich** *singuläre.*

δ) Ist schliesslich $z' = 0$ eine *mehrfache* Wurzel der Gleichung (16), so ergiebt sich vermittelst (12), dass man in der Nähe von $u = u_0$ μ ($\lambda \geq \mu > 1$) verschiedene Functionsbestimmungen von z' erhält, die für $u = u_0$ den Grenzwerth $z' = 0$ haben und durch eine Gleichung von der Form:

$$z'^\mu + f_1 z'^{\mu-1} + \ldots + f_\mu = 0$$

in der Nähe von $u = u_0$ bestimmt sind, wo $f_1 \ldots, f_\mu$ dieselbe Beschaffenheit wie in (12) haben.

Gehen wir jetzt von z' zu z zurück, so haben wir also das Resultat erhalten:

Wenn $u = u_0$ eine *Stelle der Wiederholung* für die Function z ist, in welcher mehrere Functionsbestimmungen von z *unendlich* werden, so

Digitized by Google

werden diese Functionsbestimmungen in der Nähe von $u = u_0$ durch eine Gleichung von der Form:

$$\left(\frac{1}{z}\right)^{\mu} + f_1 \left(\frac{1}{z}\right)^{\mu-1} + \ldots + f_\mu = 0 \ , \qquad (18)$$

wo $f_1, \ldots, f_\mu$ die schon erwähnte Beschaffenheit haben, gegeben.

Auch hier ist es möglich, dass in (18) eine *specielle* Functionsbestimmung von der Beschaffenheit (17) enthalten ist, für die also die Stelle $u = u_0$ eine *ausserwesentlich* singuläre ist.

Da die Gleichung (18) aus (12) dadurch hervorgeht, dass man für $z_0 = \infty$ den Ausdruck $z - z_0$ durch $\frac{1}{z}$ ersetzt, so ist also der Satz $\mathfrak{E}$ jetzt vollständig bewiesen.

Im Falle der Definition $\mathfrak{A}$ ist es — wie gross auch eine endliche reelle positive Grösse Γ gewählt sei — stets möglich, die Grösse R_1 oberhalb Γ so zu wählen, dass *auf der Peripherie*: $|u| = R_1$ keine singuläre Stelle für die Function z gelegen ist. — Um bei der Definition $\mathfrak{B}$ etwas Ähnliches zu bewirken, verfahren wir folgendermassen. Sei R der kleinste unter den wahren Convergenzradien der Potenzreihen $p(u)$, und R' eine positive reelle Zahl kleiner als R. Dann schaffe man — wenn es nicht schon gethan ist — alle im Bereiche: $|u| \leq R'$ vorkommenden gemeinsamen Nullstellen der Functionen $p(u)$ weg und wähle zuletzt — was dann auch stets geschehen kann — die positive reelle Grösse $R_1 < R'$ so, dass auf der Peripherie: $|u| = R_1$ keine singulären Stellen für die Function z sich befinden. Es ist aus dem Vorhergehenden ohne Schwierigkeit ersichtlich, dass dies stets so geschehen kann, dass die Differenzen

$$R - R' \text{ und } R' - R_1$$

kleiner als eine beliebig kleine vorgegebene reelle positive Grösse ε werden.

Nachdem dieses festgestellt, wollen wir die *im Bereiche:* $|u| \leq R_1$ *durch* (2) *erhaltene Bestimmung der Function z in eindeutige Zweige zerlegen* und *diese etwas näher untersuchen.*

Wenn $P(u)$ die Discriminante der Gleichung (2) bezeichnet, so suchen wir zunächst alle im Bereiche (3) gelegenen Wurzeln der Gleichung:

$$P(u) = 0$$

Digitized by Google

auf. Die von einander verschiedenen Werthe dieser Wurzeln, die nur in endlicher Anzahl vorkommen können, seien mit

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \tag{19}$$

bezeichnet. Ferner bezeichen wir mit

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \tag{20}$$

die ebenfalls nur in endlicher Anzahl vorkommenden, im selben Bereiche gelegenen verschiedenen Wurzeln der Gleichung

$$p_0(u) = 0. \tag{21}$$

Da die Grössen (19) die Stellen der Wiederholung, die Grössen (20) die Unendlichkeitsstellen der fraglichen Functionsbestimmung sind, und da eine Stelle der Wiederholung gleichzeitig eine Unendlichkeitsstelle sein kann, so könnten Werthe in (20) mit Werthen in (19) zusammenfallen, was wir dadurch vermeiden wollen, dass wir in (20) diejenigen Grössen auslöschen, die schon in (19) aufgenommen sind. Alsdann kommen unter den Grössen (20) keine Stellen der Wiederholung vor, und die Gleichung (2) hat also an keiner der Stellen (20) mehrfache Wurzeln. Wegen der Mehrdeutigkeit der Functionsbestimmung muss aber auch die Möglichkeit eingeräumt werden, dass ausser einem vielfachen Werthe, der einem α, oder dem unendlichen Werthe, der einem β entspricht, noch einfache endliche Werthe von z einem α oder β entsprechen können.

Den Bereich: $|u| < R_1$ schneiden wir jetzt durch Linien, die von jeder der Stellen (19) bis an den Rand des Bereiches fortlaufen, ohne einander oder sich selbst im Innern des Bereiches zu begegnen und ohne durch irgend eine der Stellen (20) hindurchzugehen.

Wir betrachten zunächst jene Schnittlinien als unüberschreitbar und wählen im Innern des geschnittenen Bereiches einen Werth $u = \gamma$, der also weder mit einem α in (19) zusammenfällt, noch auf einer Schnittlinie gelegen ist, und vom dem wir ausserdem annehmen, dass er auch nicht unter den Grössen β in (20) vorkommt.

Für $u = \gamma$ sind also die λ Wurzeln der Gleichung (2) alle endlich und von einander verschieden (einfach). Werden dieselben mit

$$\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_\lambda$$

Digitized by Google

bezeichnet, so erhalten wir nach dem Satze $\mathfrak{E}$, Gleichung (11), in einer gewissen Umgebung der Stelle $u = \gamma$ die verschiedenen Lösungen (1) der Gleichung (2) in der Gestalt:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(u) = \zeta_1 + \mathfrak{P}_1(u-\gamma), \quad \varphi_2(u) = \zeta_2 + \mathfrak{P}_2(u-\gamma), \ \ldots, \\ \varphi_\lambda(u) = \zeta_\lambda + \mathfrak{P}_\lambda(u-\gamma) \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

ausgedrückt, wo die $\mathfrak{P}(u-\gamma)$ gewöhnliche Potenzreihen von $(u-\gamma)$ ohne constantes Glied bedeuten.

Jede Stelle $u = \gamma$, die den obigen Vorschriften gemäss gewählt wird, ist also für sämmtliche aus (2) *hervorgehenden Functionsbestimmungen eine* ***reguläre,*** und *die Functionsbestimmungen sind in der Nähe dieser Stelle alle* ***von einander verschieden.***

Dieses Resultat bleibt offenbar noch bestehen, wenn die Stelle $u = \gamma$ auf einer Schnittlinie gewählt wird, mit Ausnahme nur der Anfangspunkte dieser Linien. Jetzt nehmen wir wieder an, es sei in ganz bestimmter Weise die Stelle $u = \gamma$ gewählt. Jede der Gleichungen (22) ergiebt alsdann ein Element einer analytischen Function, welches über den ganzen geschnittenen Bereich analytisch fortgesetzt werden kann und dann einen in diesem Bereiche existierenden eindeutigen Zweig einer analytischen Function ergiebt, der stets die Gleichung (2) befriedigt. Dies bleibt nämlich auch an den Stellen (20) bestehen, da sie ja für diesen Zweig höchstens gewöhnliche ausserwesentlich singuläre, wenn sie nicht — was wir als möglich hier einräumen müssen — sogar reguläre Stellen sind.

Es ergeben sich also *im ganzen geschnittenen Bereiche aus den Elementen* (22) λ *eindeutige Zweige, die überall daselbst der Gleichung* (2) *genügen und sich wie* ***rationale*** *Functionen von u verhalten.*

Es bleibt nur noch übrig zu untersuchen, wie sich jene Zweige *in der Umgebung einer Stelle* α (19) verhalten.

Es sei $u = \alpha$ eine beliebige von den Stellen (19). In einer gewissen Umgebung dieser Stelle existieren die obigen λ eindeutigen Zweige und sind von einander verschieden. Wenn sich aber u dem Werthe α unbegrenzt nähert, so müssen — da $u = \alpha$ eine Stelle der Wiederholung ist — mindestens zwei jener Zweige sich ein und demselben, endlichen oder unendlichen Grenzwerthe nähern. Alle Stellen, die in einer gewissen Umgebung der Stelle $u = \alpha$, also in einem Bereiche:

$$0 < |u - \alpha| < \varrho, \quad (23)$$

Digitized by Google

wo ϱ eine gewisse reelle positive Zahl ist, gelegen sind, müssen offenbar für die beiden Zweige *reguläre* Stellen sein.

Hier sind jetzt zwei Fälle denkbar. Betrachten wir nämlich den einen der beiden Zweige und erinnern uns, dass von der Stelle $u = \alpha$ eine Schnittlinie ausgeht, so kann durch analytische Fortsetzung längs einem im Bereiche (23) gelegenen geschlossenen Wege, der diese Stelle ein Mal umkreist, der Zweig *entweder in sich selbst oder in einen anderen übergehen.*

Im *letzteren* Falle sagt man, die Stelle $u = \alpha$ sei eine *Verzweigungsstelle*, indem in ihrer Umgebung ein eindeutiger Zweig in einen anderen übergeht.

Den *ersteren* Fall, wo also der Zweig im Bereiche (23) *eindeutig* und *regulär* ist, wollen wir ein wenig näher ins Auge fassen. Aus den eben angeführten Eigenschaften folgt sogleich, dass sich der Zweig im Bereiche (23) in eine LAURENT'sche Reihe[1]:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (u-\alpha)^n \qquad (24)$$

entwickeln lässt, wo offenbar die Reihe $\sum_{n=-\infty}^{-1} b_n (u-\alpha)^n$ beständig convergent, d. h. eine ganze Function von $\frac{1}{u-\alpha}$ ist.

Die Reihe (24) kann hier, wie leicht zu sehen ist, nie unendlich viele Glieder mit negativen Potenzen von $(u-\alpha)$ enthalten, weil daraus folgen würde, dass der Zweig bei $u = \alpha$ sich jedem beliebigen Werthe beliebig nähern könnte und also für $u = \alpha$ keinen bestimmten (endlichen oder unendlichen) Grenzwerth haben würde[2], was dem Satze Ⓔ widerspricht. Also haben wir das Resultat:

Unter den Zweigen, die sich bei einer ***Stelle der Wiederholung****: $u = \alpha$ einer* ***mehrfachen*** *Wurzel z der Gleichung*

$$f(\alpha, z) = 0$$

als Grenzwerth nähern, kann es solche geben, die in der Nähe dieser Stelle ***eindeutig*** *sind, und für* ***diese*** *Zweige ist die Stelle $u = \alpha$ entweder eine* ***reguläre*** *oder eine* ***ausserwesentlich*** *singuläre.*

---

[1] Acta Mathematica B. IV: MITTAG-LEFFLER, Démonstration nouvelle du théorème de LAURENT. — SCHEEFFER, Beweis des LAURENT'schen Satzes.

[2] WEIERSTRASS, Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen, Art. 8.

Digitized by Google

Es drängt sich uns jetzt die Frage auf, ob es einen Zweig geben kann, der an *sämmtlichen* Stellen der Wiederholung *eindeutig* und folglich im *ganzen ungeschnittenen* Bereiche (3), bezw. *überall im Endlichen*, von *rationalem* Charakter ist. Dass dies unmöglich ist, zeigt der folgende Satz.

> **8.** *Wenn $z = \varphi(u)$ eine Function ist, die im Bereiche* (3), *bezw. im eigentlichen Sinne des Wortes, von* ***algebraischem*** *Charakter ist, und deren definierende Gleichung* (2) *von* ***höherem*** *als dem ersten Grade ist, so kann die Function* ***keinen*** *im* ***ganzen*** *Bereiche* ***eindeutigen*** *Zweig haben.*

Nehmen wir nämlich versuchsweise an, die Function besitze einen solchen Zweig, der also nach dem oben Gesagten überall im betreffenden Bereiche von rationalem Charakter und folglich in die Form:

$$z = \frac{q_1(u)}{q_0(u)} \tag{25}$$

ausdrückbar sein müsste, wo $q_0(u)$ und $q_1(u)$ im selben Bereiche convergierende gewöhnliche Potenzreihen von u bezeichnen. Der Satz wird alsdann dadurch bewiesen, dass wir aus dieser Annahme folgern, dass die Gleichung (2) im fraglichen Bereiche reductibel sein müsste, was gegen die Definition verstösst.

Die Versuchsannahme, dass (25) die Gleichung (2) befriedigt, ergiebt in der That, dass man im ganzen Bereiche die Identität:

$$p_0 q_1^\lambda + p_1 q_1^{\lambda-1} q_0 + \ldots + p_{\lambda-1} q_1 q_0^{\lambda-1} + p_\lambda q_0^\lambda = 0 \tag{26}$$

hat, und dass folglich der Ausdruck:

$$q_0^\lambda (p_0 z^\lambda + p_1 z^{\lambda-1} + \ldots + p_\lambda)$$

sich auf die Form:

$$(q_0 z - q_1)(r_0 z^{\lambda-1} + r_1 z^{\lambda-2} + \ldots + r^{\lambda-1}) \tag{27}$$

bringen lässt, wo

$$r_0 = q_0^{\lambda-1} p_0\,,\quad r_1 = q_0^{\lambda-2}(p_0 q_1 + p_1 q_0)\,,\quad r_2 = q_0^{\lambda-3}(p_0 q_1^2 + p_1 q_1 q_0 + p_2 q_0^2)\,,$$
$$\ldots\ldots,\quad r_{\lambda-1} = p_0 q_1^{\lambda-1} + p_1 q_1^{\lambda-2} q_0 + \ldots + p_{\lambda-1} q_0^{\lambda-1}\,,$$

d. h. wo $r_0, r_1, \ldots, r_{\lambda-1}$ gewöhnliche Potenzreihen von u sind, die im ganzen Bereiche convergieren. Der Ausdruck (27), gleich Null ge-

Digitized by Google

setzt, würde also die Gestalt sein, worin sich die Gleichung (2) ausdrücken liesse, wenn die Versuchsannahme möglich wäre. Da aber diese Gestalt besagt, dass die Gleichung (2) im ganzen Bereiche reductibel sein sollte, so ist der Satz bewiesen.

> **G.** *Wenn die Gleichung* (2) *durch eine im* ***ganzen*** *Bereiche, wo sie z als Function von algebraischem Charakter definiert,* ***eindeutige*** *analytische Functionsbestimmung* $\varphi(u)$ *befriedigt ist, so ist die Gleichung vom* ***ersten*** *Grade, und* $\varphi(u)$ *im ganzen Bereiche von* ***rationalem*** *Charakter.*

Denn aus dem Satze $\mathfrak{F}$ folgt, dass man in (2) nicht $\lambda > 1$ haben kann. Da also $\lambda = 1$ ist, so ergiebt sich unmittelbar aus (2), dass im ganzen Bereiche

$$\varphi(u) = -\frac{p_1(u)}{p_0(u)}$$

ist, w. z. b. w.

Für die nächste Untersuchung erinnern wir noch an Folgendes.

Es sei eine Gleichung (2) von höherem als dem ersten Grade gegeben, die im Bereiche (3) eine Function von algebraischem Charakter definiert. In *dem durch die Schnittlinien aus* (3) *hervorgehenden Bereiche* existieren dann λ eindeutige Zweige dieser Functionsbestimmung, und diese Zweige sind überall im *geschnittenen* Bereiche von *rationalem* Charakter.

Von diesen Zweigen kann es nach dem Satze $\mathfrak{F}$ keinen geben, der auch *überall* im *ungeschnittenen* Bereiche eindeutig bleibt. Es muss also, wenn $\varphi_1(u)$ einen dieser Zweige bezeichnet, im Bereiche (3) mindestens *eine* Stelle der Wiederholung geben, durch deren Umkreisung $\varphi_1(u)$ in einen anderen eindeutigen Zweig übergeht. Da andererseits im Bereiche (3) die Gleichung (2) nur die λ eindeutigen Functionszweige:

$$\varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots, \varphi_\lambda(u) \qquad (28)$$

ergiebt, und da diese, die von einander verschieden sind, beliebig geordnet sein können, so dürfen wir sagen, dass die genannte Umkreisung den Zweig $\varphi_1(u)$ in $\varphi_2(u)$ überführt. Hieraus ist sofort ersichtlich, dass es unter den Zweigen (28) eine Gruppe von zwei oder mehreren geben muss, die die Eigenschaft besitzen, dass jeder andere Zweig der Gruppe aus $\varphi_1(u)$ dadurch hervorgebracht werden kann, dass man $\varphi_1(u)$ längs einer passenden, ganz im Innern des Bereiches (3) gelegenen

Digitized by Google

geschlossenen Curve analytisch fortsetzt, während dagegen, wenn noch andere Zweige in (28) vorkommen, diese anderen Zweige also aus $\varphi_1(u)$ in der genannten Weise nicht erhalten werden können.

Eine solche Gruppe eindeutiger Zweige nennt man eine im Bereiche (3) ***cyklische*** *Gruppe von Funktionszweigen* und sieht auch ohne Weiteres ein, dass *die Zweige* (28) *entweder eine einzige cyklische Gruppe bilden müssen oder sonst in mehrere cyklische Gruppen geordnet werden können.*

Wenn

$$\varphi_1(u)\,,\ \varphi_2(u)\,,\ \ldots\,,\ \varphi_r(u) \quad (1 < r \leqq \lambda) \tag{29}$$

eine cyklische Gruppe bilden, so sind diese eindeutigen Zweige alle von einander verschieden. Durch analytische Fortsetzung längs einem im Bereiche (3) gelegenen geschlossenen Wege mögen sie beziehungsweise in

$$\bar{\varphi}_1(u)\,,\ \bar{\varphi}_2(u)\,,\ \ldots\,,\ \bar{\varphi}_r(u) \tag{30}$$

übergehen. Der Definition gemäss fällt dann jeder Zweig (30) mit einem der Zweige (29) zusammen, und es besteht der Satz:

Die Reihe der Zweige (30) *fällt mit einer gewissen Anordnung der Reihe* (29) *genau zusammen.*

Dies leuchtet nämlich unmittelbar ein, wenn nur dargelegt wird, dass die Zweige (30) alle von einander verschieden sind, was folgendermassen nach bekannter Weise bewiesen werden kann. Wären nämlich zwei Zweige in (30) zusammenfallend, etwa:

$$\bar{\varphi}_\alpha(u) = \bar{\varphi}_\beta(u) \quad (\alpha \gtrless \beta)\ ,$$

so würde, wenn man die beiden Seiten dieser Gleichung längs demselben geschlossenen Wege, aber in entgegengesetzter Richtung analytisch fortsetzt, hieraus die Identität:

$$\varphi_\alpha(u) = \varphi_\beta(u)$$

hervorgehen, die aber nicht bestehen kann.

§. *Jede* ***symmetrische*** *rationale Function von* ***denjenigen*** *Zweigen einer Function von algebraischem Charakter, welche* ***eine cyklische Gruppe*** *bilden, ist eine Function von u, die im betreffenden Bereiche den Charakter einer* ***rationalen*** *Function besitzt.*

Digitized by Google

Werden die eindeutigen Zweige der cyklischen Gruppe wie in (29), und die symmetrische rationale Function von ihnen mit $\psi(u)$ bezeichnet, so haben wir also:

$$\psi(u) = R(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r), \tag{31}$$

wo R eine symmetrische rationale Function ihrer r Argumente bezeichnet. Setzt man hier die Zweige (29) längs irgend einer in (3) gelegenen geschlossenen Curve fort, und werden die neuen Zweige, worin sie dann übergehen, wie in (30) bezeichnet, so folgt aus der Symmetrie der Function R sogleich, dass

$$R(\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \ldots, \bar{\varphi}_r) = R(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r)$$

ist, d. h. dass die Function $\psi(u)$ wieder zu ihrem Anfangselemente zurückkehrt und folglich im ganzen der Definitionsgleichung (2) zugehörigen ungeschnittenen Bereiche *eindeutig* ist.

Bezeichnet man die definierende Gleichung, wie früher, kurz mit

$$f(u, z) = 0,$$

so bestehen also die Identitäten:

$$f(u, \varphi_1) = 0, \quad f(u, \varphi_2) = 0, \ldots, f(u, \varphi_r) = 0;$$

und wenn man zwischen diesen und der Gleichung (31) die r Grössen (29) eliminiert, so geht eine Gleichung

$$F(p_0, p_1, \ldots, p_\lambda, \psi(u)) = 0$$

hervor, die, wie leicht zu sehen ist, auf die Form:

$$\bar{f}(u, \psi) = 0$$

reduciert werden kann, wo $\bar{f}$ eine ganze rationale Function von ψ ist, deren Coefficienten im ganzen Bereiche convergierende gewöhnliche Potenzreihen von u sind. Wäre diese Gleichung reductibel, so könnte sie in irreductible Gleichungen zerlegt werden, und eine dieser Gleichungen muss also im ganzen Bereiche von der Function $\psi(u)$ befriedigt sein.

Also ist die Function $\psi(u)$ im ganzen Bereiche von algebraischem Charakter, und da sie, wie soeben bewiesen worden ist, daselbst auch

Digitized by Google

eindeutig ist, so ist sie nach dem Satze 𝔊 im selben Bereiche von rationalem Charakter, w. z. b. w.

Jetzt kann der folgende wichtige Satz leicht bewiesen werden.

> 𝔍. *In dem Bereiche, wo die Gleichung* (2) *eine Function von algebraischem Charakter definiert, bilden die* ***aus der Gleichung hervorgehenden*** *eindeutigen Zweige eine* ***einzige*** *cyklische Gruppe und sind also in diesem Bereiche Zweige* ***einer und derselben*** *analytischen Function.*

Wäre nämlich diese Behauptung nicht wahr, so liessen sich die genannten eindeutigen Zweige in mehrere cyklische Gruppen:

$$\varphi_1^{(1)}(u)\ ,\ \varphi_2^{(1)}(u)\ ,\ \ldots\ ,\ \varphi_{r_1}^{(1)}(u)\ , \qquad (32{,}1)$$

$$\varphi_1^{(2)}(u)\ ,\ \varphi_2^{(2)}(u)\ ,\ \ldots\ ,\ \varphi_{r_2}^{(2)}(u)\ , \qquad (32{,}2)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varphi_1^{(\nu)}(u)\ ,\ \varphi_2^{(\nu)}(u)\ ,\ \ldots\ ,\ \varphi_{r_\nu}^{(\nu)}(u)\ . \qquad (32{,}\nu)$$

ordnen, wo

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_\nu = \lambda\ .$$

Für jede dieser Gruppen giebt es also eine Gleichung

$$(z-\varphi_1^{(1)})(z-\varphi_2^{(1)})\ldots(z-\varphi_{r_1}^{(1)}) = 0\ , \qquad (33{,}1)$$

$$(z-\varphi_1^{(2)})(z-\varphi_2^{(2)})\ldots(z-\varphi_{r_2}^{(2)}) = 0\ , \qquad (33{,}2)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(z-\varphi_1^{(\nu)})(z-\varphi_2^{(\nu)})\ldots(z-\varphi_{r_\nu}^{(\nu)}) = 0\ , \qquad (33{,}\nu)$$

die zu ihrer sämmtlichen Wurzeln die einzelnen Zweige der Gruppe hat.

Wird die linke Seite einer jeden dieser Gleichungen entwickelt, so entsteht eine ganze rationale Function von z, deren Coefficienten symmetrische ganze rationale Functionen von den Zweigen der entsprechenden cyklischen Gruppe und folglich, dem Satze 𝔍 zufolge, Functionen von u sind, die im ganzen betreffenden Bereiche von *rationalem* Charakter sind und die wir in leicht verständlicher Weise mit

$$R_\alpha^{(\beta)}(u)$$

Digitized by Google

bezeichnen. Setzen wir gleich Null das Product der linken Seiten der Gleichungen (33), so geht also eine Gleichung von der Form:

$$\left(z^{r_1} + R_1^{(1)}(u) z^{r_1-1} + \ldots + R_{r_1}^{(1)}(u)\right)\left(z^{r_2} + R_1^{(2)}(u) z^{r_2-1} + \ldots + R_{r_2}^{(2)}(u)\right)\ldots$$

$$\ldots\left(z^{r_\nu} + R_1^{(\nu)}(u) z^{r_\nu-1} + \ldots + R_{r_\nu}^{(\nu)}(u)\right) = 0 \qquad (34)$$

hervor, die im ganzen Bereiche genau dieselben Wurzeln wie (2) besitzt und auf die Form:

$$z^\lambda + \bar{R}_1(u) z^{\lambda-1} + \ldots + \bar{R}_\lambda(u) = 0 \qquad (35)$$

gebracht werden kann. Die linken Seiten von (34) und (35) sind offenbar genau dieselbe Function von z und u.

Die Gleichung (2), auf die Gestalt:

$$z^\lambda + \frac{p_1}{p_0} z^{\lambda-1} + \ldots + \frac{p_\lambda}{p_0} = 0 \qquad (36)$$

gebracht, hat also genau dieselben Wurzeln wie (35), und da jene Wurzeln im ganzen Bereiche, nur einzelne Stellen ausgenommen, von einander verschieden sind, so wird also die Gleichung:

$$\left(\frac{p_1}{p_0} - \bar{R}_1(u)\right) z^{\lambda-1} + \ldots + \left(\frac{p_\lambda}{p_0} - \bar{R}_\lambda(u)\right) = 0$$

λ verschiedene Wurzeln haben, woraus sogleich folgt, dass die Relationen

$$\frac{p_1}{p_0} = \bar{R}_1(u), \ldots, \frac{p_\lambda}{p_0} = \bar{R}_\lambda(u)$$

im ganzen Bereiche gelten, und dass also die linken Seiten von (34) und (36) genau dieselbe Function von z und u sind. Hieraus geht aber ohne Schwierigkeit hervor, dass die Gleichung (2) im ganzen Bereiche reductibel sein müsste, was gegen die Voraussetzung ist.

Also können die eindeutigen Zweige, die aus (2) hervorgehen, im betrachteten Bereiche nicht mehrere cyklische Gruppen bilden, und somit ist der Satz bewiesen.

Der Deutlichkeit wegen schalten wir noch folgende, wenn auch wahrscheinlich überflüssige, einfache Bemerkung ein.

Wenn in der Gleichung (2) der den Coefficienten zukommende grösste gemeinsame Convergenzbereich *endlich* und durch den Radius

Digitized by Google

R gekennzeichnet ist — wobei die Grösse R_1 beliebig nahe an R liegen kann —, und selbstredend die Gleichung (2) der Definition gemäss im Bereiche (3) auch irreductibel ist, so ist es jedoch möglich, dass die durch (2) in diesem Bereiche definierten eindeutigen Zweige sich auch *ausserhalb* des Kreises: $|u| = R$ analytisch fortsetzen lassen, d. h. dass die *analytische Function* von u, von der die Gleichung (2) im Bereiche (3) λ eindeutige Zweige gegeben hat, auch *ausserhalb* des genannten Kreises existieren kann. Hierbei ist möglich, nicht nur dass die Function im *erweiterten* Gebiete eine *mehr als λ-deutige* Bestimmung erhalten kann, sondern auch dass sie *dann sogar aufhören kann, von algebraischem Charakter zu sein.* Wir bestätigen dies durch folgende zwei einfache Beispiele.

Beispiel 1. Es sei im Bereiche: $|u| \leq 1$ eine gewöhnliche Potenzreihe $p_1(u)$ von u durch die Entwickelung der im genannten Bereiche durch die Aufungsbedingung: $p_1(0) = +1$ eindeutig fixierten Quadratwurzel aus $(1-u)$, also durch

$$p_1(u) = 1 - \frac{1}{2}u - \frac{1}{2.4}u^2 - \frac{1.3}{2.4.6}u^3 - \ldots, \quad |u| \leq 1$$

definiert. Nehmen wir dann als Gleichung (2):

$$z - p_1(u) = 0,$$

so definiert diese Gleichung *im Bereiche:* $|u| \leq 1$, wo sie offenbar *irreductibel* ist, z als *eindeutige* Function von *algebraischem* Charakter. Der hierdurch erhaltene eindeutige Zweig $\varphi_1(u)$, d. h. $p_1(u)$, lässt sich aber *ausserhalb* des Kreises: $|u| = 1$ analytisch *fortsetzen* und *behält* auch im *erweiterten* Gebiete seinen *algebraischen* Charakter; aber die Function bekommt dadurch noch einen *zweiten* eindeutigen Zweig und wird also im *erweiterten* Gebiete eine *zweideutige*, deren definierende Gleichung (2) jetzt

$$z^2 - (1-u) = 0 \quad , \quad |u| < \infty$$

ist, die offenbar im *erweiterten* Gebiete *irreductibel* ist. Dass die letztere Gleichung im *ursprünglichen* Bereiche: $|u| \leq 1$ *reductibel* ist, ersieht man unmittelbar, weil sie dort geschrieben werden kann:

$$\big(z - p_1(u)\big)\big(z + p_1(u)\big) = 0 .$$

Digitized by Google

Beispiel 2. Unter $p_1(u)$ wollen wir jetzt die nur im Bereiche: $|u| < 1$ absolut convergierende gewöhnliche Potenzreihe von u, worin

$$e^{\frac{1}{1-u}}$$

entwickelbar ist, verstehen. *Im genannten Bereiche* wird dann durch die Gleichung

$$z - p_1(u) = 0 ,$$

die offenbar irreductibel ist, eine eindeutige Function von *algebraischem* Charakter definiert, die sich auch hier *ausserhalb* des Gebietes *fortsetzen* lässt und *eindeutig* bleibt, aber *dann* ihren *algebraischen* Charakter *verliert.*

Die obigen Bemerkungen geben zu folgenden Betrachtungen Anlass. Eine analytische Function $\varphi(u)$ kann so beschaffen sein, dass man schrittweise in weiteren und weiteren Bereichen für sie definierende Gleichungen von der Form (2) erhalten kann. Der Grad einer solchen Gleichung in Bezug auf z kann um so höher sein, je weiter der entsprechende Bereich ist, und entschieden nie niedriger für einen grösseren sein als für einen kleineren. Dies rührt natürlich davon her, dass die für einen kleineren Bereich erhaltene definierende Gleichung (2) nicht alle Zweige der Function zu geben braucht, und dass die folgenden definierenden Gleichungen (2) neue Zweige zu den durch die vorhergehenden schon erhaltenen hinzufügen können. (Siehe Beispiel 1).

Fügen wir noch die Annahme hinzu, dass man die Reihe von definierenden Gleichungen (2) unbeschränkt fortsetzen und dadurch entsprechende Bereiche von der Form (3) und von beliebig grossem Umfang erhalten kann.

Wenn dann mit unbegrenzt wachsendem Bereiche der Grad der definierenden Gleichung über jede Zahl hinaus wächst, so ist die Function *unendlich* vieldeutig. Giebt es dagegen eine endliche ganze positive Zahl N, die nie kleiner ist als der Grad einer jeden der definierenden Gleichungen (2), so ist die Function *endlich* vieldeutig und kann höchstens N verschiedene eindeutige Zweige haben. Andererseits, wenn die Function $\varphi(u)$ genau n-deutig ist, so muss es eine endliche, wenn auch sehr grosse, reelle positive Zahl R' geben, so beschaffen, dass durch analytische Fortsetzungen im Bereiche: $|u| < R'$ alle übrigen

Digitized by Google

Zweige der Function aus einem von ihnen erhalten werden. Die zu diesem oder einem noch grösseren Bereiche gehörige Gleichung (2) muss alsdann gerade vom Grade n sein. Jetzt können wir folgenden Satz beweisen, der uns nützlich sein wird in den Untersuchungen über Functionen, die ein Additionstheorem besitzen.

𝔎. *Wenn eine Function $z = \varphi(u)$ n-deutig* (also nicht unendlich vieldeutig) *und ausserdem so beschaffen ist, dass sie in* ***jedem beliebig grossen*** *Bereiche:*

$$|u| < R' \qquad (37)$$

einer definierenden Gleichung von der Form und Beschaffenheit (2) *genügt, so kann der Grad λ dieser Gleichung nie grösser als n sein, und die Function $\varphi(u)$ ist alsdann im* ***eigentlichen*** *Sinne des Wortes eine Function von* ***algebraischem*** *Charakter* (*Def.* 𝔄).

Gäbe es nämlich eine definierende Gleichung (2), deren Grad λ grösser als n wäre, so müsste die Function mindestens λ eindeutige Zweige haben und also mehr als n-deutig sein, was der Annahme widerspricht.

Es bleibt also nur noch übrig zu beweisen, dass die Function eine irreductible Gleichung

$$P_0(u)z^n + P_1(u)z^{n-1} + \ldots + P_n(u) = 0 \qquad (38)$$

befriedigt, wo die $P(u)$ *beständig* convergierende gewöhnliche Potenzreihen von u sind, was folgendermassen leicht gethan werden kann.

Da für jedes hinlänglich grosse R' die dem Bereiche (37) entsprechende Gleichung (2) alle Zweige von $\varphi(u)$ geben und also vom n:ten Grade sein muss, so ist jede symmetrische rationale Function von den Zweigen von $\varphi(u)$ im Bereiche (37) und folglich, da R' oberhalb jeder beliebigen endlichen Zahl gewählt werden kann, *überall im Endlichen* von *rationalem* Charakter. (Sats 𝔖).

Die Gleichung:

$$(z - \varphi_1)(z - \varphi_2)\ldots(z - \varphi_n) = 0\,,$$

die die Function $\varphi(u)$ überall im Endlichen genau definiert, lässt sich also auf die Gestalt:

Digitized by Google

$$z^n + R_1(u)z^{n-1} + \ldots + R_n(u) = 0$$

bringen, wo die $R(u)$ überall im Endlichen von *rationalem* Charakter und folglich als Quotienten beständig convergierender gewöhnlicher Potenzreihen von u darstellbar sind. Hieraus geht aber leicht hervor, dass die obige Gleichung auf die Form (38) reduciert werden kann, was offenbar eine irreductible Gleichung ergiebt. Also ist der Satz bewiesen.

Man muss genau beachten, dass es unbedingt nothwendig ist darzuthun, dass λ *nicht mit* R' *über alle Grenzen wächst;* denn sonst gäbe es ja keine Gleichung von der Form und Beschaffenheit (38), wie es doch die Definition $\mathfrak{A}$ fordert.

II.

Algebraische Functionen.

Diese Functionen bilden nur einen speciellen Fall von den Functionen, die im eigentlichen Sinne des Wortes von algebraischem Charakter sind, und zwar denjenigen Fall, wo in der definierenden Gleichung (2) die ganzen Functionen $p(u)$ auch *rational* sind. Bezeichnen wir hier die unabhängige Veränderliche mit x und den Grad der definierenden Gleichung mit μ, so bekommen wir aus $\mathfrak{A}$ die Definition:

$\mathfrak{C}$. *Jede Function:*

$$z = \varphi(x) \ . \tag{39}$$

die einer irreductiblen Gleichung:

$$g_0(x)z^\mu + g_1(x)z^{\mu-1} + \ldots + g_\mu(x) = 0 \tag{40}$$

genügt, in welcher $g_0(x), \ldots, g_\mu(x)$ *ganze rationale Functionen von* x *sind, wird eine algebraische Function von* x *genannt.*

Die Eigenschaften dieser Functionen müssen also in einfacher und enger Beziehung zu den entsprechenden Eigenschaften der Func-

Digitized by Google

tionen von algebraischem Charakter stehen, und wir können uns daher hierüber ziemlich kurz fassen.

Beinahe alles, was wir von den algebraischen Functionen werden nöthig haben zu wissen, ist im folgenden Satze enthalten.

M. *Jede algebraische Function von x hat zum Existenzbereich die Gesammtheit* ***aller*** *Werthe von x (∞ eingeschlossen), besitzt genau so viele eindeutige Zweige, wie der Grad ihrer definierenden Gleichung angiebt, und hat im ganzen Existenzbereiche nur eine* ***endliche*** *Anzahl singulärer Stellen, die entweder* ***ausserwesentlich*** *singuläre oder Stellen der* ***Wiederholung*** *sind. Diejenigen Zweige der Function, die an einer Stelle der* ***Wiederholung*** *$x = x_0$ einen und denselben, endlichen oder unendlichen, Werth z_0 annehmen, sind in einer gewissen Umgebung dieser Stelle durch eine Gleichung von der Form ($\mu \geq \nu > 1$):*

$$(z - z_0)^\nu + f_1(z - z_0)^{\nu-1} + \ldots + f_\nu = 0$$

bestimmt, wo $f_1, \ldots, f_\nu$ gewöhnliche Potenzreihen von $(x - x_0)$ ohne constantes Glied bezeichnen, und $x - x_0$ durch $\frac{1}{x}$ zu ersetzen ist, wenn die Stelle der Wiederholung im Unendlichen liegt.

Da die ganzen *rationalen* Functionen in den Ganzen enthalten sind, so ist der Inhalt dieses Satzes beinahe vollständig aus den Sätzen über Functionen von algebraischem Charakter zu entnehmen. Nur folgendes ist noch hinzuzufügen.

Dass auch $x = \infty$ zum Existenzbereiche gehört, geht sogleich daraus hervor, dass man in der Gleichung (40) — da die $g(x)$ ganze *rationale* Function sind — $x = \frac{1}{x'}$ setzen, dann mit einer passenden Potenz von x' multiplicieren und somit eine Gleichung:

$$g'_0(x')z^\mu + g'_1(x')z^{\mu-1} + \ldots + g'_\mu(x') = 0$$

von derselben Beschaffenheit wie (40) erhalten kann, wo offenbar $x' = 0$ zum Existenzbereiche der Function z gehört.

Digitized by Google

Dass schliesslich singuläre Stellen nur in endlicher Anzahl vorkommen können, ist leicht zu ersehen. Denn die Gleichung:

$$g_0(x) = 0$$

kann nur von einer endlichen Anzahl m_0 verschiedener Werthe von x befriedigt werden; also hat die Function höchstens m_0 im Endlichen liegende ausserwesentlich singuläre Stellen. Da ferner die Discriminante $\gamma(x)$ der Gleichung (40) eine ganze rationale Function von x ist, so kann sie nur für eine endliche Anzahl m_1 verschiedener Werthe von x verschwinden, und folglich hat die Function nur m_1 im Endlichen liegende Stellen der Wiederholung. Da schliesslich auch eine singuläre Stelle im Unendlichen liegen kann, so hat die Function höchstens $m_0 + m_1 + 1$ singuläre Stellen.

Der Satz ist also vollständig bewiesen.

> **R.** *Wenn eine* ***algebraische*** *Function von x im* ***ganzen*** *Existenzbereiche* ***eindeutig*** *ist, so ist sie eine* ***rationale*** *Function.*

Denn da die algebraische Function eindeutig ist, so ist ihre definierende Gleichung (40) nach dem Satze **G** vom ersten Grade und hat also die Gestalt:

$$g_0(x)z + g_1(x) = 0\,,$$

woraus

$$z = -\frac{g_1(x)}{g_0(x)}$$

folgt. Also ist z eine *rationale* Function von x, w. z. b. w.

Digitized by Google

III

Charakteristische Gleichung, Additionstheoreme.

Vorläufig erinnern wir an die Definitionen:

I. *Wenn eine analytische Function* $\varphi(u)$ *für alle Werthesysteme* u, v, $\frac{u+v}{2}$, *die ihrem Existenzbereiche angehören, einer irreductiblen Gleichung von der Gestalt:*

$$G\left(\varphi(u), \varphi(v), \varphi\left(\frac{u+v}{2}\right)\right) = 0 \qquad (1)$$

genügt, wo $G(x, y, z)$ *eine* ***ganze rationale*** *Function ihrer drei Argumente mit von* u *und* v *unabhängigen Coefficienten bedeutet, so sagt man, dass die Function eine* ***charakteristische Gleichung*** *besitzt.*

II. *Wenn eine analytische Function* $\varphi(u)$ *für alle Werthesysteme* u, v, $u+v$, *die ihrem Existenzbereiche angehören, einer irreductiblen Gleichung von der Gestalt:*

$$G(\varphi(u), \varphi(v), \varphi(u+v)) = 0 \qquad (2)$$

genügt, wo $G(x, y, z)$ *von derselben Beschaffenheit wie in* I *ist, so sagt man, dass die Function ein* ***algebraisches Additionstheorem*** *besitzt.*

Dass die Gleichung (1) oder (2) *irreductibel* sein soll, bedeutet, dass sie, in der Form

$$G(x, y, z) = 0$$

geschrieben, nicht in mehrere Gleichungen von derselben Beschaffenheit zerlegbar sein darf.

An jene Definitionen sind zunächst einige einfache Bemerkungen zu knüpfen.

Digitized by Google

Damit eine analytische Function $\varphi(u)$ eine charakteristische Gleichung hat, reicht es offenbar aus anzunehmen, dass es im regulären Gebiete von $\varphi(u)$ drei Stellen:

$$u = a \ , \quad u = b \ , \quad u = \frac{a+b}{2}$$

giebt, die so beschaffen sind, dass die charakteristische Gleichung (1) befriedigt wird, wenn man

$$\varphi(u) \ , \quad \varphi(v) \ , \quad \varphi\left(\frac{u+v}{2}\right)$$

beziehungsweise durch

$$P_1(u-a) \ , \quad P_2(v-b) \ , \quad P_3\left(\frac{u+v}{2} - \frac{a+b}{2}\right)$$

ersetzt, wo diese P gewöhnliche Potenzreihen von

$$u-a \ , \quad v-b \ , \quad \frac{u+v}{2} - \frac{a+b}{2}$$

bezeichnen, welche Elemente gewisser eindeutiger Zweige von der Function φ sind und also Convergenzbereiche von der Form

$$|u-a| < \varrho_1 \ , \quad |v-b| < \varrho_2 \ , \quad \left|\frac{u+v}{2} - \frac{a+b}{2}\right| < \varrho_3 \qquad (3)$$

besitzen. In der auf diese Weise erhaltenen Relation

$$G(x, y, z) = 0 \ , \qquad (4)$$

wo also x, y, z durch

$$x = P_1(u-a) \ , \quad y = P_2(v-b) \ , \quad z = P_3\left(\frac{u+v}{2} - \frac{a+b}{2}\right) \qquad (5)$$

erklärt sind, müssen offenbar u und v auf einen solchen Bereich beschränkt sein, dass darin die Bedingungen (3) alle gleichzeitig erfüllt sind [1].

[1] Die Veranlassung, die Aufgabe so zu stellen, habe ich einer Abhandlung von Herrn E. PHRAGMÉN [Acta Mathematica, Band VII, Seiten 33—42] entnommen, worin er von einer analogen Annahme ausgeht bei der Untersuchung der Eigenschaften einer analytischen Function, die ein algebraisches Additionstheorem besitzt.

Digitized by Google

Die Gleichung (4), die der Annahme nach irreductibel ist, hat die Gestalt:

$$g_0(x, y)z^\lambda + g_1(x, y)z^{\lambda-1} + \ldots + g_\lambda(x, y) = 0 , \qquad (6)$$

wo die $g(x, y)$ ganze rationale Functionen von x und y sind.

Bezeichnen wir mit $D(x, y)$ die Discriminante dieser Gleichung (6), so ist dieselbe eine nicht identisch verschwindende ganze rationale Function der zwei Argumente x und y.

Es bezeichne ϱ'_1 eine — nach einer unten zu gebenden Vorschrift gewählte — reelle positive Zahl $< \varrho_1$, und u eine in der Umgebung

$$|u - a| < \varrho'_1$$

von a beliebig gewählte Stelle, die wir für die folgende Untersuchung fest halten. Die erste der Gleichungen (5) ergiebt alsdann einen bestimmten endlichen Werth von x, und wenn wir in (6) diesen Werth von x festhalten, so kommen dort nur zwei Veränderliche y und z vor.

Wenn nun — was offenbar angenommen werden darf — der genannte Werth von u so gewählt worden ist, dass keine der Gleichungen:

$$g_0(x, y) = 0 , \quad D(x, y) = 0 \qquad (7)$$

für jeden Werth von y befriedigt ist, so kann für den eben bestimmten Werth von x keine der Gleichungen (7) unendlich viele Wurzeln y haben.

Da $P_1(v - a)$ und $P_2(v - b)$ Elemente ein und derselben analytischen Function $\varphi(v)$ sind, so kann man im Innern des regulären Bereiches dieser Function einen Theilbereich so absondern, dass $P_2(v - b)$ in $P_1(v - a)$ übergeht, wenn man $P_2(v - b)$ längs irgend einem von $v = b$ zu $v = a$ in diesem Theilbereiche fortlaufenden Wege analytisch fortsetzt. Im Innern und — nöthigenfalls nach einer stets ausführbaren beliebig kleinen Beschränkung des Bereiches — am Rande dieses Theilbereiches geht also aus dem Elemente $P_2(v - b)$ eine *eindeutige reguläre* Functionsbestimmung hervor, und diese, die wir für einen Augenblick mit $\bar{\varphi}(v)$ bezeichnen wollen, fällt in dēr Umgebung von $v = a$ mit $P_1(v - a)$ zusammen.

Wenn $\bar{y}$ eine beliebige Wurzel der einen oder der anderen von den Gleichungen (7) bezeichnet, so kann die Gleichung

$$\bar{\varphi}(v) = \bar{y} \qquad (8)$$

Digitized by Google

im genannten Theilbereiche nie unendlich viele Wurzeln v haben; denn wenn es deren unendlich viele gäbe, so würde es dort auch eine Stelle $v = \alpha$ geben, in *jeder* Nähe derselben die Gleichung (8) von α verschiedene Wurzeln hätte, was unmöglich ist, da $v = \alpha$ für $\bar{\varphi}(v)$ eine reguläre Stelle ist[1]. Alle diejenigen im Innern und am Rande des Theilbereiches liegenden Werthe von v, für welche der entsprechende Werth von $\bar{\varphi}(v)$ einer Wurzel irgend einer der Gleichungen (7) gleichkommt, können daher nur eine *endliche* Anzahl von Stellen ergeben, und es ist also stets möglich, in diesem Theilbereiche von $v = b$ zu $v = a$ einen Weg so zu legen, dass es eine reelle positive Zahl ϱ giebt, die so beschaffen ist, dass *jede* Stelle dieses Weges eine *Umgebung mit dem Radius* ϱ hat, *in deren Innerem keine von* $v = a$ *und* $v = b$ *verschiedene*[2] *Wurzel irgend einer der Gleichungen* (8) *liegt.*

Jetzt führen wir in (6)

$$y = \bar{\varphi}(v) \tag{9}$$

ein und erhalten somit

$$g_0(x, \bar{\varphi}) z^\lambda + g_1(x, \bar{\varphi}) z^{\lambda-1} + \ldots + g_\lambda(x, \bar{\varphi}) = 0\,, \tag{10}$$

wo der Kürze halber statt $\bar{\varphi}(v)$ nur $\bar{\varphi}$ geschrieben worden ist.

Im Bereiche: $|v - b| < \varrho$, wo offenbar $\varrho \leq \varrho_2$ ist, dürfen wir $\bar{\varphi}(v)$ durch $P_2(v - b)$ ersetzen, wodurch die Coefficienten in (10) gewöhnliche Potenzreihen von $(v - b)$ werden, die also in diesem Bereiche sicher convergieren, und der Annahme nach ist (10) alsdann durch

$$z = P_3\left(\frac{u+v}{2} - \frac{a+b}{2}\right) \tag{11}$$

befriedigt. Da nun

$$\left|\frac{u+v}{2} - \frac{a+b}{2}\right| \leq \frac{1}{2}|u-a| + \frac{1}{2}|u-b|$$

ist, so zeigt die letzte der Bedingungen (3), dass die Potenzreihe P_3 in (11) sicher convergiert, wenn u und v die Bedingung

$$|u-a| + |v-b| < 2\varrho_3$$

---

[1] Es würde sich nämlich sonst ergeben, dass $\bar{\varphi}(v)$ im ganzen Theilbereiche einen von v unabhängigen Werth haben müsste, was selbstredend auszuschliessen ist.

[2] Da die Werthe a und b vorgegeben sind, so muss offenbar als möglich eingeräumt werden, dass $v = a$ oder $v = b$ Wurzel einer Gleichung (8) sein kann.

Digitized by Google

erfüllen, was stets für Werthe von v erreichbar ist, wenn nur — wie offenbar vorausgesetzt werden darf — die Grösse ϱ'_1 von vorn herein kleiner als $2\varrho_3$ angenommen worden ist. Im Bereiche

$$|v-b| < 2\varrho_3 - \varrho'_1 = \bar{\varrho} \tag{12}$$

kann alsdann die in (11) vorkommende Reihe P_3 in eine gewöhnliche Potenzreihe von $(v-b)$ umgebildet werden, wodurch (11) also ein Resultat:

$$z = \mathfrak{P}(v-b) \text{ für } |v-b| < \bar{\varrho} \tag{13}$$

ergiebt.

Ersetzen wir also in (10) $\bar{\varphi}(v)$ durch $P_2(v-b)$, so bekommen wir eine Gleichung von der Form:

$$p_0(v-b)z^\lambda + p_1(v-b)z^{\lambda-1} + \ldots + p_\lambda(v-b) = 0 \ , \tag{14}$$

wo die Coefficienten $p(v-b)$ gewöhnliche Potenzreihen von $(v-b)$ sind, die für

$$|v-b| < \varrho \tag{15}$$

sicher convergieren, und den gemachten Feststellungen gemäss kann in dieser Gleichung (14) weder der Coefficient $p_0(v-b)$ noch ihre Discriminante für einen im Bereiche:

$$0 < |v-b| < \varrho \tag{16}$$

gelegenen Werth von v verschwinden.

In einer Umgebung jedes in diesem Bereiche (16) gelegenen Werthes v_0 von v ergiebt daher die Gleichung (14) λ von einander verschiedene Bestimmungen von z, und zwar alle als convergierende gewöhnliche Potenzreihen von $(v-v_0)$.

Da ferner in einer Umgebung von $v = b$ die Gleichung (14) durch

$$z = \mathfrak{P}(v-b) \tag{17}$$

befriedigt ist, so giebt es also eine im *ganzen* Bereiche (15) eindeutige und reguläre Functionsbestimmung z, die überall daselbst der Gleichung (14) genügt und in der Nähe von $v = b$ durch (17) dargestellt wird. Hieraus folgt aber, dass die Reihe $\mathfrak{P}(v-b)$ im *ganzen* Be-

Digitized by Google

reiche (15) convergiert, und dass (17) überall daselbst der Gleichung (14) Genüge leistet[1]

Auf dem von $v = b$ zu $v = a$ gelegten Wege nehmen wir jetzt im Innern des Bereiches (15) eine Stelle $v = v_1$ und bilden in (14), nachdem z durch $\mathfrak{P}(v - b)$ ersetzt worden ist, die einzelnen Bestandtheile zu Potenzreihen von $(v - v_1)$ um. Da das somit erhaltene Resultat zunächst für eine Umgebung von $v = v_1$ bewiesen ist, so ergiebt sich, wie leicht zu sehen ist, ein Resultat, das folgendermassen ausgedrückt werden kann.

Wenn man in der Gleichung (10) die Coefficienten als gewöhnliche Potenzreihen von $(v - v_1)$ entwickelt, was den gemachten Feststellungen gemäss für den ganzen Bereich: $|v - v_1| < \varrho$ gültige Entwickelungen ergiebt, so geht eine Gleichung hervor, die von

$$z = \mathfrak{P}_1(v - v_1) \tag{18}$$

befriedigt wird, wo $\mathfrak{P}_1(v - v_1)$ die unmittelbare Umbildung von $\mathfrak{P}(v - b)$ ist, und in derselben Weise wie oben lehrt, dass die Reihe $\mathfrak{P}_1(v - v_1)$ im selben ganzen Bereiche: $|v - v_1| < \varrho$ nicht nur convergiert, sondern auch der Gleichung (10) Genüge leistet.

Auf dem Wege von $v = v_1$ zu $v = a$ nehme man ebenfalls im Innern des Bereiches: $|v - v_1| < \varrho$ eine Stelle $v = v_2$ und verfahre wie oben, u. s. f. Da die hierbei schrittweise hervorgehenden Potenzreihenentwickelungen der Coefficienten in (10) stets Convergenzradien $\geq \varrho$ haben, so kann man eine *endliche* Anzahl von Stellen:

$$v_1, v_2, \ldots, v_m$$

so einschalten, dass schliesslich die Stelle $v = a$ im Bereiche:

$$|v - v_m| < \varrho \tag{19}$$

gelegen ist, und man erhält dann — analoger Weise wie oben — wenigstens im kleineren Bereiche:

$$|v - v_m| < |a - v_m| \tag{20}$$

eine Lösung:

$$z = \mathfrak{P}_m(v - v_m) \tag{21}$$

[1] Es ist in der That hierdurch auch bewiesen, dass die Gleichung (14) im Bereiche (15) reductibel ist, und dass unter den Gleichungen, worin sie zerlegbar ist, die Gleichung (17) vorkommt.

Digitized by Google

der Gleichung (10). Wenn $v = a$ keine singuläre Stelle der Gleichung (10), d. h. keine Wurzel einer Gleichung (8) ist, so convergiert die Reihe $\mathfrak{P}_m(v - v_m)$ im ganzen Bereiche (19) und genügt daselbst der Gleichung (10). Unabhängig davon, ob $v = a$ reguläre oder singuläre Stelle dieser Gleichung ist, kann man die Coefficienten derselben im ganzen Bereiche (19) in gewöhnliche Potenzreihen von $(v - v_m)$ entwickeln und ersieht daraus, dass sie stets in diesem ganzen Bereiche unter Anderem eine analytische Functionsbestimmung ergiebt, die im Bereiche (20) mit (21) zusammenfällt. Werden schliesslich die Coefficienten in der letzt benutzten Form der Gleichung (10) in Potenzreihen von $(v - a)$ umgebildet, die ja im ganzen Bereiche: $|v - a| < \varrho$ convergieren, so entsteht eine Gleichung, die im selben Bereiche auch noch eine analytische Bestimmung von z ergiebt, welche im gemeinsamen Theile der Bereiche:

$$|v - a| < \varrho \text{ und } |v - v_m| < \varrho$$

mit der soeben im Bereiche (19) erhaltenen zusammenfällt.

Da diese letzte Form von (10) das Resultat ist, welches aus (4) für

$$x = P_1(u - a)\,,\quad y = P_1(v - a)$$

hervorgeht, d. h.

$$G\Big(P_1(u - a)\,,\ P_1(v - a)\,,\ z\Big) = 0\ , \tag{22}$$

und diese Gleichung also von der aus

$$z = P_3\Big(\frac{u + v}{2} - \frac{a + b}{2}\Big)$$

— durch die oben als möglich erwiesene analytische Fortsetzung längs dem Wege von $v = b$ wenigstens zu jeder Nähe von $v = a$ — erhaltenen Functionsbestimmung in der Umgebung von $v = a$ befriedigt ist, so existiert also die Function $\varphi\Big(\frac{u + v}{2}\Big)$ in einem Bereiche, wo u und v beide in einer gewissen Umgebung der Stelle $u = a$ liegen. Wir haben also gefunden, dass man in der charakteristischen Gleichung:

$$G\Big(\varphi(u)\,,\ \varphi(v)\,,\ \varphi\Big(\frac{u + v}{2}\Big)\Big) = 0\ , \tag{1}$$

Digitized by Google

wenn u und v beide in einer gewissen Umgebung der Stelle $u = a$ liegen, die für die Function eine reguläre Stelle ist, $\varphi(u)$ und $\varphi(v)$ als *ein und demselben* eindeutigen Zweige der Function angehörige Werthe annehmen darf, und dass es dann zunächst wenigstens *einen* Zweig der Function giebt, der an der Stelle $\frac{u+v}{2}$ existiert und der charakteristischen Gleichung genügt.

Da wir den wahren Existenzbereich einer analytischen Function, die eine charakteristische Gleichung besitzt, noch nicht nachgewiesen haben, so müssen wir jetzt, um die Untersuchung weiterführen zu können, *der charakteristischen Gleichung noch eine Bedingung auferlegen*, und zwar diejenige *dass für* $v = u$ — wobei also $\frac{u+v}{2}$ den Werth u erhält — *der Zweig* $\varphi\left(\frac{u+v}{2}\right)$ *mit dem Zweige* $\varphi(u)$ *zusammenfallen darf*, oder m. a. W. *dass die Gleichung*

$$G(x, y, z) = 0 ,$$

nachdem man y *durch* x *ersetzt hat, auch wenn* x *willkürlich bleibt, unter Anderem von dem Werthe* $z = x$ *befriedigt werden soll. Es soll also eine gewöhnliche Potenzreihe* $\mathfrak{P}(w)$ *geben, für die es gilt, dass für alle Werthepaare* u, v, *die in einer hinlänglich kleinen Umgebung der Stelle* $w = a$ *liegen, die Gleichung:*

$$G\left(\mathfrak{P}(u-a), \mathfrak{P}(v-a), \mathfrak{P}\left(\frac{u+v}{2} - a\right)\right) = 0 \qquad (23)$$

besteht, und diese $\mathfrak{P}(u-a)$ ist alsdann ein Element von der analytischen Function $\varphi(u)$, die die charakteristische Gleichung (1) besitzt.

Nachdem dieses also festgestellt, können wir weiter gehen und beweisen zunächst den Satz:

III. *Wenn* $u = a$ *eine* **reguläre** *Stelle für die analytische Function* $\varphi(u)$ *ist, und wenn man*

$$u = a + u' , \quad \varphi(a + u') = \psi(u') \qquad (24)$$

setzt, so ist auch $\psi(u')$ *eine analytische Function von* u'. *Besitzt dann die Function* $\varphi(u)$ *eine charakteristische Gleichung, so hat auch* $\psi(u')$ *genau* **dieselbe** *charakteristische Gleichung, und für* $\psi(u')$ *ist* $u' = 0$ *eine* **reguläre**

Digitized by Google

Stelle, unabhängig von der Beschaffenheit oder sogar von der Existenz der Function $\varphi(u)$ an der Stelle: $u = 0$. [W. 85][1].

Der Annahme nach hat man nämlich

$$\varphi(u) = \mathfrak{P}(u - a) \quad \text{für } |u - a| < R ,$$

wo R eine gewisse reelle positive Grösse bezeichnet, welche Gleichung also in der angegebenen Umgebung der Stelle $u = a$ *einen eindeutigen Zweig* von $\varphi(u)$ darstellt. Es liege auch die Stelle v in derselben Umgebung, also

$$|v - a| < R .$$

Dann gehört ebenfalls die Stelle $\frac{u+v}{2}$ derselben Umgebung an.

Da ferner angenommen ist, dass $\varphi(u)$ eine charakteristische Gleichung (1) hat, so besteht, den obigen Feststellungen gemäss, die Gleichung (23) für alle diese Werthe u und v, und folglich die Gleichung

$$G\left(\mathfrak{P}(u'), \mathfrak{P}(v'), \mathfrak{P}\left(\frac{u'+v'}{2}\right)\right) = 0$$

für

$$|u'| < R , \quad |v| < R ,$$

d. h.

$$G\left(\psi(u'), \psi(v'), \psi\left(\frac{u'+v'}{2}\right)\right) = 0 , \qquad (25)$$

wenn

$$\psi(u') = \mathfrak{P}(u') , \quad \psi(v') = \mathfrak{P}(v') , \quad \psi\left(\frac{u'+v'}{2}\right) = \mathfrak{P}\left(\frac{u'+v'}{2}\right)$$

die Werthe von $\psi(u')$, $\psi(v')$, $\psi\left(\frac{u'+v'}{2}\right)$ in der genannten Umgebung

[1] Mit [W. 85], einem Satze angehängt, bezeichnen wir, dass WEIERSTRASS in seinen, im Sommersemester 1885 gehaltenen Vorlesungen über Elliptische Functionen diesen Satz gegeben und bewiesen hat. Im Beweise des obigen Satzes hat W. jedoch ohne Weiteres angenommen, dass $\varphi(u)$, $\varphi(v)$ und $\varphi\left(\frac{u+v}{2}\right)$ ein und demselben eindeutigen Zweige der Function angehören.

Digitized by Google

der Stelle $u' = 0$ definieren, und zwar als einem und demselben eindeutigen Zweige der Function angehörig. Da $u' = 0$ eine reguläre Stelle für die Function $\psi(u')$ ist, so ist der Satz also bewiesen.

IV. *Wenn eine analytische Function $\varphi(u)$ eine* ***charakteristische Gleichung*** *besitzt, so existiert sie in* ***jedem*** *endlichen Bereiche:*

$$|u| < R$$

und ist ***überall*** *daselbst von* ***algebraischem*** *Charakter.*

Aus dem Satze III leuchtet sogleich ein, dass wir uns hier auf den Fall beschränken dürfen, dass die Stelle $u = 0$ für die Function eine reguläre ist. Wir dürfen also mit der Annahme anfangen, dass in einer gewissen Umgebung:

$$|u| < \varrho \tag{26}$$

der Stelle: $u = 0$ ein eindeutiger Zweig von $\varphi(u)$ durch

$$\varphi(u) = \mathfrak{P}(u) = b_0 + b_1 u + \ldots \tag{27}$$

gegeben ist, wo $\mathfrak{P}(u)$ eine im Bereiche (26) convergierende gewöhnliche Potenzreihe von u bezeichnet. Wenn auch

$$|v| < \varrho$$

ist, so haben wir also

$$G\left(\mathfrak{P}(u),\ \mathfrak{P}(v),\ \mathfrak{P}\left(\frac{u+v}{2}\right)\right) = 0\ .$$

Hier dürfen wir $v = 0$ setzen, was ein Resultat:

$$G\left(\mathfrak{P}(u),\ b_0,\ \mathfrak{P}\left(\frac{u}{2}\right)\right) = 0 \tag{28}$$

ergiebt und eine wirkliche Abhängigkeit zwischen $\mathfrak{P}(u)$ und $\mathfrak{P}\left(\frac{u}{2}\right)$ ausdrückt; denn da die Gleichung

$$G(x,\ y,\ z) = 0$$

Digitized by Google

irreductibel ist, so kann ihre linke Seite keinen Factor $(y - b_0)$ enthalten.

Die Gleichung (28) bezeichnen wir einfacher mit

$$f\left(\varphi\left(\frac{u}{2}\right), \varphi(u)\right) = 0, \tag{29}$$

wo $f(z, x)$ eine ganze rationale Function von z und x ist und

$$\varphi(u) = \mathfrak{P}(u), \ \varphi\left(\frac{u}{2}\right) = \mathfrak{P}\left(\frac{u}{2}\right) \tag{30}$$

im Bereiche (26). Der Satz ist alsdann bewiesen, wenn der folgende bewiesen wird.

V. *Wenn ein Element $\mathfrak{P}(u)$ einer analytischen Function $\varphi(u)$, die sich an der Stelle $u = 0$ regulär verhält, einer* ***algebraischen Gleichung von der Form:***

$$f\left(\mathfrak{P}\left(\frac{u}{2}\right), \mathfrak{P}(u)\right) = 0$$

Genüge leistet, und wenn R eine beliebig grosse, aber ***endliche*** *reelle positive Zahl ist, so* ***existiert*** *die Function im* ***ganzen*** *Bereiche:*

$$|u| < R$$

und ist überall daselbst von ***algebraischem*** *Charakter.*

Der Annahme nach wird nämlich in einem Bereiche: $|u| < \varrho$ das betreffende Element $\mathfrak{P}(u)$ convergieren und der Gleichung:

$$f\left(\mathfrak{P}\left(\frac{u}{2}\right), \mathfrak{P}(u)\right) = 0 \tag{31}$$

genügen; und aus Gründen, die wir schon mehrmals erwähnt haben, dürfen wir annehmen, dass die Gleichung (31) irreductibel ist.

Da man in (31) statt u $\frac{u}{2}$, im somit erhaltenen Resultate wiederum statt u $\frac{u}{2}$ setzen und dieses Verfahren beliebig oft wiederholen kann, so erhält man:

Digitized by Google

$$\left.\begin{array}{ll} f\left(\mathfrak{P}\left(\frac{u}{2}\right), \mathfrak{P}(u)\right) = 0 , & \text{für } |u| < \varrho \\ f\left(\mathfrak{P}\left(\frac{u}{2^2}\right), \mathfrak{P}\left(\frac{u}{2}\right)\right) = 0 , & \text{» } |u| < 2\varrho \\ f\left(\mathfrak{P}\left(\frac{u}{2^3}\right), \mathfrak{P}\left(\frac{u}{2^2}\right)\right) = 0 , & \text{» } |u| < 2^2\varrho \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ f\left(\mathfrak{P}\left(\frac{u}{2^\mu}\right), \mathfrak{P}\left(\frac{u}{2^{\mu-1}}\right)\right) = 0 , & \text{» } |u| < 2^{\mu-1}\varrho \end{array}\right\} \quad (32)$$

wo μ eine beliebig grosse reelle ganze positive Zahl ist.

Wenn man für einen Augenblick

$$\mathfrak{P}(u) = x , \ \mathfrak{P}\left(\frac{u}{2}\right) = x_1 , \ \mathfrak{P}\left(\frac{u}{2^2}\right) = x_2 , \ \ldots , \ \mathfrak{P}\left(\frac{u}{2^\mu}\right) = x_\mu \quad (33)$$

setzt, so kann man die Gleichungen (32) ganz einfach folgendermassen schreiben:

$$f(x_1 , x) = 0 , f(x_2 , x_1) = 0 , f(x_3 , x_2) = 0 , \ldots , f(x_\mu , x_{\mu-1}) = 0 , \quad (34)$$

deren linke Seiten ganze rationale Functionen je zweier der Grössen $x , x_1 , x_2 , \ldots , x_\mu$ sind.

Eliminiert man zwischen den Gleichungen (34), deren Anzahl $= \mu$ ist, die $(\mu - 1)$ Grössen $x_1 , x_2 , \ldots , x_{\mu-1}$, so ergiebt sich eine Gleichung:

$$\gamma(x_\mu , x) = 0 , \quad (35)$$

deren linke Seite eine ganze rationale Function von x_μ und x ist, und diese Gleichung ist jedesmal befriedigt, wenn die Gleichungen (34) gelten. Also haben wir jetzt gefunden, dass die Gleichung (35) für $|u| < \varrho$ durch

$$x = \mathfrak{P}(u) , \quad x_\mu = \mathfrak{P}\left(\frac{u}{2^\mu}\right)$$

befriedigt ist, weil die Gleichungen (34) bestehen, wenn die Grössen $x , x_1 , \ldots , x_\mu$ durch (33) definiert werden.

Digitized by Google

Da ferner die Gleichung (35) die Gestalt:

$$\gamma_0(x_\mu)x^\lambda + \gamma_1(x_\mu)x^{\lambda-1} + \ldots + \gamma_\lambda(x_\mu) = 0$$

hat, wo die $\gamma(x_\mu)$ ganze rationale Functionen von x_μ sind, so findet man also, da

$$\gamma_\alpha(x_\mu) = \gamma_\alpha\left(\mathfrak{P}\left(\frac{u}{2^\mu}\right)\right) = p_\alpha(u)$$

ist, wo $p_\alpha(u)$ eine gewöhnliche Potenzreihe von u bedeutet, die sogar im ganzen Bereiche:

$$|u| < 2^\mu \varrho \tag{36}$$

convergiert, dass die Gleichung:

$$p_0(u)x^\lambda + p_1(u)x^{\lambda-1} + \ldots + p_\lambda(u) = 0 \tag{37}$$

zunächst im kleineren Bereiche: $|u| < \varrho$ durch

$$x = \mathfrak{P}(u) \tag{38}$$

befriedigt wird. Da die Zahl μ beliebig gross sein kann, so ist es stets möglich, nachdem die Grösse R gewählt worden, μ so gross anzunehmen, dass

$$2^\mu \varrho > R$$

wird. Alsdann *convergieren die Potenzreihen* $p(u)$ *im ganzen Bereiche*:

$$|u| \leq R\,. \tag{39}$$

Wenn jetzt — was hier erwartet werden kann — die Gleichung (37) im Bereiche (36) reductibel ist, so muss sie in irreductible Gleichungen zerlegbar sein, und eine dieser Gleichungen wird alsdann im Bereiche: $|u| < \varrho$ durch (38) befriedigt. Also dürfen wir diese Gleichung statt (37) setzen, oder m. a. W. wir dürfen annehmen, dass (37) im Bereiche (36) *irreductibel* ist.

Aus dem Satze 3 folgt dann, dass die Gleichung (37) im ganzen Bereiche (39) λ eindeutige Zweige einer analytischen Function von u ergiebt, und dass diese Zweige im Bereiche (36) eine einzige cyklische Gruppe bilden. Da ferner, wie oben bewiesen ist, die Gleichung (37)

Digitized by Google

im kleineren Bereiche: $|u| < \varrho$ durch (38) befriedigt wird, so ist also $\mathfrak{P}(u)$ in ihrem Convergenzbereiche ein Element von einem jener λ eindeutigen Zweige, und folglich ergiebt sich im Bereiche (36) aus dem Elemente $\mathfrak{P}(u)$ eine λ-deutige Bestimmung der analytischen Function $\varphi(u)$. Diese Function existiert also im Bereiche (39), und aus der im Bereiche:

$$|u| < \varrho$$

bestehenden Gleichung (31) geht dann durch analytische Fortsetzungen hervor, dass die Function überall im Endlichen der Gleichung (29) genügt, w. z. b. w.

Es ist hier wohl zu beachten, dass wir nicht schliessen dürfen, dass die Function $\varphi(u)$ — blos weil sie die Bedingungen des Satzes erfüllt — im *eigentlichen* Sinne des Wortes von algebraischem Charakter sein muss; denn wir haben ja noch nicht bewiesen, dass der Grad λ der Gleichung (37) nicht mit R über jede Grenze hinaus wachsen, oder m. a. W. dass die Function $\varphi(u)$ nicht unendlich vieldeutig sein kann.

Wir stellen jetzt analoge Untersuchungen über die Functionen an, die ein *algebraisches Additionstheorem* besitzen.

Die Annahme, dass die Function diese Eigenschaft hat, erklären wir — ebenfalls nach dem Vorgange des Herrn PHRAGMÉN — folgendermassen. Im regulären Bereiche der Function $\varphi(u)$ soll es drei Stellen:

$$u = a \ , \quad u = b \ , \quad u = a + b$$

geben von der Beschaffenheit, dass wenn

$$P_1(u - a) \ , \quad P_2(v - b) \ , \quad P_3(u + v - a - b)$$

Werthe von

$$\varphi(u) \ , \quad \varphi(v) \ , \quad \varphi(u + v)$$

beziehungsweise in Bereichen von der Form:

$$|u - a| < \varrho_1 \ , \quad |v - b| < \varrho_2 \ , \quad |u + v - a - b| < \varrho_3$$

bedeuten, die Gleichung (2), d. h.

$$G(x, y, z) = 0 \qquad (40)$$

Digitized by Google

für

$$x = P_1(u-a) \ , \quad y = P_2(v-b) \ , \quad z = P_3(u+v-a-b)$$

erfüllt ist, so lange die drei Potenzreihen convergieren.

Da $P_1(v-a)$ und $P_2(v-b)$ Elemente *einer und derselben* analytischen Function bedeuten, so kann man auch hier — in ganz analoger Weise, wie wir es schon für Functionen, die mit einer charakteristischen Gleichung versehen sind, gethan haben — beweisen, dass es in der Nähe der Stelle $w = 2a$ einen Zweig $\varphi_3(w)$ von $\varphi(w)$ giebt, welcher für $w = u+v$ der Gleichung (40) genügt, nachdem man darin

$$x = P_1(u-a) \ , \quad y = P_1(v-a) \tag{41}$$

gesetzt hat, d. h. dass für alle Werthepaare u, v in einem Bereiche:

$$|u-a| < \varrho \ , \quad |v-a| < \varrho \ , \tag{42}$$

wo ϱ eine gewisse reelle positive Zahl ist, die Relation:

$$G\Big(P_1(u-a) \ , \ P_1(v-a) \ , \ \varphi_3(u+v)\Big) = 0 \tag{43}$$

besteht.

Da die oben angedeutete Untersuchung ergiebt, dass es für den Zweig $\varphi_3(w)$ einen Bereich von den Form:

$$|w-2a| < \bar{\varrho} \tag{44}$$

giebt, worin entweder gar keine oder nur die einzige singuläre Stelle $w = 2a$ sich befinden kann, so kann man sicher in der Umgebung $|u-a| < \varrho$ eine Stelle $u = a'$ finden von der Beschaffenheit, dass

$$u = a' \text{ für } \varphi_1(u) \text{ und } w = 2a' \text{ für } \varphi_3(w)$$

reguläre Stellen sind. In einem gewissen Bereiche:

$$|u-a'| < \varrho' \ , \quad |w-2a'| < \bar{\varrho}'$$

hat man also:

$$\varphi_1(u) = \mathfrak{P}_1(u-a') \ , \quad \varphi_3(w) = \mathfrak{P}_3(w-2a')$$

Digitized by Google

und nach (43), wenn unmittelbare analytische Umbildungen vorgenommen werden,

$$G\Big(\mathfrak{P}_1(u-a')\ ,\ \mathfrak{P}_1(v-a')\ ,\ \mathfrak{P}_3(u+v-2a')\Big)=0\ . \qquad (45)$$

Dies setzt uns jetzt in den Stand, den folgenden wichtigen Satz zu beweisen, wobei wir in (45) statt a' einfach a schreiben.

> VI. *Wenn $\varphi(u)$ eine analytische Function ist, die ein* **algebraisches Additionstheorem** *besitzt, so kann stets eine Grösse a so gewählt werden, dass die durch*
>
> $$\varphi(a+w)=\psi(w)$$
>
> *definierte analytische Function $\psi(w)$ ebenfalls ein* **algebraisches Additionstheorem** *besitzt und ausserdem für $w=0$ sich* **regulär** *verhält. Hier ist gar Nichts von der Beschaffenheit oder Existenz der Function $\varphi(u)$ an der Stelle $u=0$ vorausgesetzt.*

Da wir die Existenz einer Grösse a soeben nachgewiesen haben, welche die Beschaffenheit hat, dass $u=a$ für $\varphi_1(u)$ und $w=2a$ für $\varphi_3(w)$ *reguläre* Stellen sind, so geschieht der Beweis ganz einfach folgendermassen.

Behalten wir die obigen Bezeichungen bei, so ist also — siehe (45) — hier angenommen, dass man — wenigstens wenn ϱ der Bedingung: $2\varrho \leqq \bar{\varrho}$ unterworfen wird — für

$$|u-a|<\varrho\ ,\quad |v-a|<\varrho\ ,\quad |u+v-2a|<\bar{\varrho} \qquad (46)$$

die Relation

$$G\Big(\mathfrak{P}_1(u-a)\ ,\ \mathfrak{P}_1(v-a)\ ,\ \mathfrak{P}_3(u+v-2a)\Big)=0 \qquad (47)$$

hat, wo $\mathfrak{P}_1(u-a)$, $\mathfrak{P}_1(v-a)$ Werthe des eindeutigen Zweiges φ_1 und $\mathfrak{P}_3(u+v-2a)$ den Werth des eindeutigen Zweiges φ_3 von der Function φ bedeuten.

Für alle Werthepaare u', v', die dem absoluten Betrage nach unter einer gewissen reellen positiven Grösse ε liegen, werden alsdann die Bedingungen (46) erfüllt, sowohl wenn man

Digitized by Google

$$u = u' + a \ , \quad v = v' + a \ ,$$

als wenn man

$$u = u' + v' + a \ , \quad v = a$$

setzt, und folglich erhält man aus (47) für

$$|u'| < \varepsilon \ , \quad |v'| < \varepsilon \tag{48}$$

die beiden Relationen:

$$G\Big(\mathfrak{P}_1(u') \ , \ \mathfrak{P}_1(v') \ , \ \mathfrak{P}_3(u' + v')\Big) = 0 \ ,$$

$$G\Big(\mathfrak{P}_1(u' + v') \ , \ \mathfrak{P}_1(0) \ , \ \mathfrak{P}_3(u' + v')\Big) = 0 \ ,$$

wo $\mathfrak{P}_1(0)$ eine bestimmte endliche Constante bedeutet. Da hier $\mathfrak{P}_3(u' + v')$ in beiden Gleichungen wirklich vorkommt und dieselbe Bedeutung hat, so kann man diese Grösse eliminieren und erhält also eine wirkliche Relation:

$$\overline{G}\Big(\mathfrak{P}_1(u') \ , \ \mathfrak{P}_1(v') \ , \ \mathfrak{P}_1(u' + v')\Big) = 0 \ ,$$

d. h. da

$$\mathfrak{P}_1(u - a) = \varphi_1(u)$$

und somit

$$\mathfrak{P}_1(u') = \varphi_1(a + u') = \psi_1(u')$$

ist, wo $\psi_1(u')$ einen gewissen eindeutigen Zweig von $\psi(u')$ bedeutet, die Relation:

$$\overline{G}\Big(\psi_1(u') \ , \ \psi_1(v') \ , \ \psi_1(u' + v')\Big) = 0 \tag{49}$$

für

$$|u'| < \varepsilon \ , \quad |v'| < \varepsilon \ .$$

Wir haben also gefunden, dass die Function ψ, für welche die Stelle $u' = 0$ eine reguläre ist, ein algebraisches Additionstheorem besitzt, und dass darin $\psi_1(u')$, $\psi_1(v')$ und $\psi_1(u' + v')$, wenn u' und v' den Bedingungen (48) genügen, als Werthe *eines und desselben* eindeutigen Zweiges angenommen werden dürfen.

Digitized by Google

Durch analytische Fortsetzungen kann man sodann aus (49) die allgemeine Gültigkeit des algebraischen Additionstheorems für die Function ψ darthun.

VII. *Wenn eine analytische Function $\varphi(u)$ ein* ***algebraisches Additionstheorem*** *hat, so existiert sie in* ***jedem*** *endlichen Bereiche:*

$$|u| < R$$

und ist ***überall*** *daselbst von* ***algebraischem*** *Charakter.*

Dem Satze VI zufolge brauchen wir offenbar die Behauptung nur für den Fall zu beweisen, dass die Function $\varphi(u)$ sich an der Stelle $u = 0$ regulär verhält. Werden dann zunächst u und v durch die Bedingungen:

$$|u| < \frac{1}{2}\varrho \ , \quad |v| < \frac{1}{2}\varrho$$

beschränkt, wo ϱ den Convergenzradius derjenigen Potenzreihe $\mathfrak{P}(w)$ bedeutet, vermittelst welcher der eindeutige Zweig $\varphi(w)$ in der Form:

$$\varphi(w) = \mathfrak{P}(w)$$

ausdrückbar ist, so hat man nach (49)

$$G\big(\mathfrak{P}(u) \ , \ \mathfrak{P}(v) \ , \ \mathfrak{P}(u+v)\big) = 0 \quad \text{für } |u| < \frac{1}{2}\varrho \ , \quad |v| < \frac{1}{2}\varrho \ .$$

Es ergiebt sich folglich, wenn $v = u$ gesetzt wird, ein Resultat von der Gestalt:

$$f\big(\mathfrak{P}(u) \ , \ \mathfrak{P}(2u)\big) = 0 \quad \text{für } |u| < \frac{1}{2}\varrho$$

oder

$$f\Big(\mathfrak{P}\Big(\frac{u}{2}\Big) \ , \ \mathfrak{P}(u)\Big) = 0 \quad \text{für } |u| < \varrho \ ,$$

wo $f(z, x)$ eine ganze rationale Function von x und z bedeutet, und hieraus folgt vermittelst des Satzes V sogleich das zu beweisende Resultat.

Digitized by Google

VIII. *Wenn eine* ***mehrdeutige*** *analytische Function ein algebraisches Additionstheorem:*

$$G\Big(\varphi(u)\ ,\ \varphi(v)\ ,\ \varphi(u+v)\Big) = 0$$

besitzt, so bleibt diese Gleichung bestehen, wenn man $\varphi(u)$, $\varphi(v)$, $\varphi(u+v)$ *durch* ***irgend welche*** *ihrer eindeutigen Zweige ersetzt*[1].

Der Annahme nach besteht nämlich die Gleichung:

$$G(x,\ y,\ z) = 0 \tag{50}$$

zunächst für

$$x = P_1(u-a)\ ,\quad y = P_2(v-b)\ ,\quad z = P_3(u+v-a-b) \tag{51}$$

im ganzen Bereiche, wo diese Potenzreihen convergieren und gewisse eindeutige Zweige $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(v)$, $\varphi_3(u+v)$ von der Function ausdrücken.

Geht man von $\varphi_1(w)$ aus, wo w in der Nähe von a liegt, so ist alsdann $\varphi_1(w)$ durch $P_1(w-a)$ ausgedrückt, und durch analytische Fortsetzung dieser Reihe über den ganzen regulären Bereich der Function φ kann man *jeden* anderen eindeutigen Zweig erhalten, wenn nur der Weg, längs dessen die Fortsetzung geschieht, passend gewählt wird. Ebenfalls kann irgend ein beliebig ausgewählter eindeutiger Zweig in derselben Weise aus irgend einem anderen hergeleitet werden.

Wie man sich von der Warheit des Satzes überzeugen kann, geht leicht aus der folgenden Ueberlegung hervor, worin wir beweisen wollen, dass man in der Gleichung (50), ohne die in (51) gegebene Bedeutung von x und y zu ändern, statt des Werthes (51) von z irgend einen anderen beliebig ausgewählten eindeutigen Zweig:

$$z = \overline{P}_3(u+v-a-b) \tag{52}$$

setzen darf.

Unsrer Annahme nach giebt es nämlich im regulären Bereiche der Function $\varphi(w)$ einen Theilbereich von der Beschaffenheit, dass durch analytische Fortsetzungen darin nicht nur die Reihe $P_1(w-a)$ in $P_3(w-a-b)$, sondern auch die letztere Reihe in $\overline{P}_3(w-a-b)$ umgewandelt werden kann. Es muss daher eine endliche reelle positive

[1] Diesen Satz und einen Beweis, der dem hier zu gebenden ziemlich ähnlich ist, findet man in der oben citierten Abhandlung des Herrn PHRAGMÉN.

Digitized by Google

Zahl R geben, für die dieser Theilbereich ganz im Innern des Bereiches:

$$|w| \leq R \tag{53}$$

enthalten ist.

Da ferner die im Bereiche (53) aus dem Elemente $P_1(w-a)$ hervorgehende Bestimmung von $\varphi(w)$ überall daselbst von algebraischem Charakter (Satz VII) ist, so hat sie im ganzen Bereiche (53) *nur eine endliche Anzahl singulärer Stellen* (Satz E)[1].

Durch Schnittlinien, die von jeder dieser singulären Stellen bis an den Rand des Bereiches (53) so gezogen werden, dass sie weder sich selbst noch einander treffen, machen wir diesen Bereich *einfach* zusammenhängend. Als in dem also erhaltenen geschnittenen Bereiche liegend können offenbar die drei Stellen $w=a$, $w=b$, $w=a+b$ angenommen werden, da man ja die Schnittlinien noch der Bedingung unterwerfen kann, durch keine dieser Stellen gehen zu dürfen.

Durch analytische Fortsetzung des Elementes $P_3(w-a-b)$ längs einem gewissen im ungeschnittenen Bereiche (53) fortlaufenden geschlossenen Wege, der von $w=a+b$ ausgeht und zu dieser Stelle zurückkehrt, geht der Annahme nach dieses Element in $\overline{P}_3(w-a-b)$ über. Da ein eindeutiger Zweig nur dadurch in einen anderen übergehen kann, dass man ihn über mindestens eine Schnittlinie analytisch fortsetzt, die von einer Verzweigungsstelle ausgeht, oder m. a. W. dass man die veränderliche Stelle w eine solche Stelle umkreisen lässt, so kann man den fraglichen Weg so umformen, dass er aus einer gewissen Anzahl in bestimmter Reihenfolge geordneter Schleifen zusammengesetzt wird, wo jede Schleife dadurch entsteht, dass w, von der Stelle $w=a+b$ ausgehend, bis in beliebiger Nähe einer Verzweigungsstelle anlangt, dann diese Stelle längs einem beliebig kleinen Kreise umläuft und schliesslich längs dem ersten Wege nach der Stelle $w=a+b$ zurückkehrt.

Man sieht ohne Schwierigkeit ein, dass die Stellen u und v, ohne den durch die Schnittlinien hervorgebrachten *einfach* zusammenhängenden Bereich zu verlassen, sich gleichzeitig so bewegen können,

[1] Man beachte die Fussnote 2, Seite 30 und die Bemerkung vor dem Satze VI, woraus hervorgeht, dass man — nöthigenfalls nach Annahme einer Grösse b' in der Nähe von b und nach analytischer Umbildung von $P_2(v-b)$ und $P_3(u+v-a-b)$ zu $P'_2(v-b')$ und $P'_3(u+v-a-b')$ — annehmen darf, dass die Stelle $w=a+b$ (bezw. $w=a+b'$) eine *reguläre* Stelle für $\overline{P}_3(w-a-b)$ (bezw. $\overline{P}_3'(w-a-b')$) ist.

Digitized by Google

dass dadurch die durch $w = u + v$ definierte Grösse w eine beliebige von den oben genannten Schleifen ein Mal und vollständig durchläuft, wobei natürlich u und v von den Stellen $u = a$, $v = b$ ausgehen und zu denselben zurückkehren sollen. Wenn alsdann

$$z = \mathfrak{P}(u + v - a - b) \tag{54}$$

für

$$|u - a| < \varrho_1 \ , \quad |v - b| < \varrho_2$$

der Gleichung:

$$G\Big(P_1(u - a) \ , \ P_2(v - b) \ , \ z\Big) = 0 \tag{55}$$

Genüge leistet, so bleibt diese Gleichung für die gleichzeitigen analytischen Fortsetzungen längs den oben genannten Wegen bestehen, und es ergiebt sich also, dass die Gleichung (55) auch durch

$$z = \bar{\mathfrak{P}}(u + v - a - b)$$

befriedigt wird, wo $\bar{\mathfrak{P}}(w - a - b)$ das neue Element bezeichnet, worin $\mathfrak{P}(w - a - b)$ durch analytische Fortsetzung längs der Schleife übergegangen ist.

Durch Wiederholung dieser Schlussweise kann offenbar das erzielte Resultat erhalten, und der Satz somit als vollständig bewiesen betrachtet werden.

IX. *Jede analytische Function $\varphi(u)$, die ein* ***algebraisches Additionstheorem*** *besitzt, ist* ***endlich*** *mehrdeutig (inclus. eindeutig) und im* ***eigentlichen*** *Sinne des Wortes eine Function von* ***algebraischem*** *Charakter.*

Denn dem Satze VIII gemäss wissen wir, dass die Gleichung:

$$G\Big(\varphi_1(u) \ , \ \varphi_1(v) \ , \ \varphi(u + v)\Big) = 0 \ , \tag{56}$$

wo φ_1 einen beliebig ausgewählten eindeutigen Zweig von der Function φ bezeichnet, durch *jeden* Werth $\varphi(u + v)$, den die Function an der Stelle $u + v$ hat, befriedigt ist. Da aber diese Gleichung in Bezug auf $\varphi(u + v)$ von gegebenem endlichen Grade n ist, so kann also die

Digitized by Google

Function φ für keinen Werth des Argumentes mehr als n Werthe haben und ist also *höchstens*[1] n-deutig.

Aus diesem Resultate und dem Inhalte des Satzes VII ergiebt sich dann nach dem Satze $\mathfrak{K}$, dass die Function im eigentlichen Sinne des Wortes von algebraischem Charakter ist.

Also ist der wichtige Satz bewiesen.

Bemerkung. Wenn man in der Gleichung (56) $v = u$ annimmt, so ergiebt sich eine Gleichung:

$$g\left(\varphi_1(u),\ \varphi(2u)\right) = 0\ , \qquad (57)$$

die stets als irreductibel angenommen werden darf und eine wirkliche Abhängigkeit zwischen $\varphi_1(u)$ und $\varphi(2u)$ enthält, aber in Bezug auf $\varphi(2u)$ von niedrigerem als dem n:ten Grade sein kann, wie es z. B. für die Function $\wp(u)$ bekanntlich der Fall ist; denn $\wp(2u)$ ist ja als rationale Function von $\wp(u)$ ausdrückbar. — Auch der Grad von (57) in Bezug auf $\varphi(2u)$ ist bisweilen höher als der Mehrdeutigkeitsgrad der Function $\varphi(u)$, bisweilen gleich diesem, wie man aus Beispielen ersehen kann. Es ist unnöthig, hierauf näher einzugehen.

Andererseits ist aber *der Grad der Mehrdeutigkeit der Function $\varphi(u)$ genau dem Grade derjenigen irreductiblen Gleichung gleich, welche ausdrückt, dass $\varphi(u)$ im eigentlichen Sinne des Wortes von algebraischem Charakter ist.* [Siehe den Beweis des Satzes $\mathfrak{K}$].

Jetzt gehen wir zu weiteren Untersuchungen über und beweisen zunächst den Satz:

---

[1] Dass man hier nicht schliessen darf, dass die Function *genau* n-deutig sein muss, ist leicht zu ersehen. Wenn nämlich x und y gegeben sind, so kann der eindeutige Zweig $\varphi_1(u)$ für mehrere Werthe u_1, u_2 ... den Werth x, und $\varphi_1(v)$ für mehrere Werthe v_1, v_2, ... den Werth y erhalten. Alle Werthe, die $\varphi(u+v)$ für $u+v = u_\lambda + v_\mu$ erhält, sind dann Werthe von z, die der Gleichung: $G(x, y, z) = 0$ genügen. Also sind *diese* Werthe nicht mehr als n an der Zahl; da sie aber mehreren *verschiedenen* Werthen von $u+v$ entsprechen können, so brauchen sie nur zu ergeben, dass die Function höchstens n-deutig ist. Als Beispiel hierfür kann die Function $\wp(u)$ dienen, die eindeutig ist, obgleich ihr algebraisches Additionstheorem vom 2:ten Grade in $\wp(u+v)$ ist.

Digitized by Google

X. *Wenn $\varphi(u)$ eine analytische Function ist, die eine* ***charakteristische*** *Gleichung besitzt, so besteht für jedes Werthesystem u, v, u', v',, das die Bedingung:*

$$u + v = u' + v' \tag{58}$$

erfüllt, eine ***Gleichung von der Form:***

$$F\Big(\varphi(u)\,,\ \varphi(v)\,,\ \varphi(u')\,,\ \varphi(v')\Big) = 0\,, \tag{59}$$

wo $F(\xi, \eta, \xi', \eta')$ eine ganze rationale Function ihrer vier Argumente bezeichnet [W. 85].

Betrachten wir die Werthe u, v, u', v' als gegeben und führen wir für einen Augenblick zwei Veränderliche $\bar{u}$, $\bar{v}$ ein. Alsdann besteht der Annahme nach eine Gleichung von der Form:

$$G\Big(\varphi(\bar{u})\,,\ \varphi(\bar{v})\ \ ,\ \ \varphi\Big(\frac{\bar{u}+\bar{v}}{2}\Big)\Big) = 0\,. \tag{60}$$

Lassen wir hier $\bar{u}$ und $\bar{v}$, von dem Werthepaare:

$$\bar{u} = u\ \ ,\ \ \bar{v} = v$$

ausgehend und der Bedingung:

$$\bar{u} + \bar{v} = u + v$$

stets genügend, sich stetig so ändern, dass sie schliesslich die Werthe:

$$\bar{u} = u'\ \ ,\ \ \bar{v} = v'$$

annehmen, so bleibt die Gleichung (60) während dieser Aenderung bestehen, und man hat also die Resultate:

$$G\Big(\varphi(u)\ \ ,\ \ \varphi(v)\ \ ,\ \ \varphi\Big(\frac{u+v}{2}\Big)\Big) = 0\,,$$

$$G\Big(\varphi(u')\ \ ,\ \ \varphi(v')\ \ ,\ \ \varphi\Big(\frac{u'+v'}{2}\Big)\Big) = 0\,,$$

wo folglich

$$\varphi\Big(\frac{u+v}{2}\Big) = \varphi\Big(\frac{u'+v'}{2}\Big)$$

Digitized by Google

ist. Aus diesen drei Gleichungen kann man dann die Grössen $\varphi\left(\frac{u+v}{2}\right)$ und $\varphi\left(\frac{u'+v'}{2}\right)$ eliminieren und erhält also eine Gleichung von der Form (59).

Der Satz ist also bewiesen.

Bemerkung. Wenn die betrachtete Function $\varphi(w)$ an der Stelle $w = 0$ sich regulär verhält, und wenn man — was dann stets möglich ist — die Werthe u, v, u', v' in den Convergenzbereich eines die Function in der Nähe von $w = 0$ definierenden Elementes $\mathfrak{P}(w)$ verlegt, so ist die Gleichung (59) offenbar durch

$$\varphi(u) = \mathfrak{P}(u) \ , \quad \varphi(v) = \mathfrak{P}(v) \ , \quad \varphi(u') = \mathfrak{P}(u') \ , \quad \varphi(v') = \mathfrak{P}(v')$$

befriedigt.

XI. *Wenn $\varphi(u)$ eine analytische Function ist, die an der Stelle $u = 0$ sich* ***regulär*** *verhält, und wenn — jedesmal, wo u, v, u', v' im Convergenzbereiche eines die Function in einer Umgebung dieser Stelle darstellenden Elementes $\mathfrak{P}(u)$ so gewählt sind, dass die Bedingung:*

$$u + v = u' + v' \tag{61}$$

erfüllt ist — eine algebraische Gleichung:

$$F\left(\mathfrak{P}(u) \ , \ \mathfrak{P}(v) \ , \ \mathfrak{P}(u') \ , \ \mathfrak{P}(v')\right) = 0 \tag{62}$$

besteht, so besitzt die Function $\varphi(u)$ ein ***algebraisches Additionstheorem*** [W. 85].

Mit selbstverständlichen Bezeichnungen schreiben wir die Gleichung (62) in der Form:

$$F(\xi \ , \ \eta \ , \ \xi' \ , \ \eta') = 0 \ . \tag{63}$$

Es sei

$$\mathfrak{P}(0) = b \ ,$$

wo also b eine bestimmte endliche Grösse ist. Die Gleichung (63) kann dann folgendermassen entwickelt werden:

Digitized by Google

$$F_0(\xi, \eta, \xi') + F_1(\xi, \eta, \xi')(\eta' - b) + \ldots + F_n(\xi, \eta, \xi')(\eta' - b)^n = 0, \quad (64)$$

wo alle $F(\xi, \eta, \xi')$ ganze rationale Functionen ihrer drei Argumente sind, und $F_0(\xi, \eta, \xi')$ nicht identisch gleich Null ist, weil die Gleichung (62) als irreductibel anzunehmen ist. Lassen wir jetzt u und v dem absoluten Betrage nach so klein sein, dass nicht nur u und v, sondern auch $u + v$ dem Convergenzbereiche der Potenzreihe $\mathfrak{P}(u)$ angehören, so dürfen wir $v' = 0$ und folglich

$$u' = u + v$$

annehmen. Hierdurch ergiebt sich also, wenn (64) berücksichtigt wird, aus (62) das Resultat:

$$F_0\Big(\mathfrak{P}(u), \mathfrak{P}(v), \mathfrak{P}(u + v)\Big) = 0,$$

woraus man leicht folgert, dass die Function $\varphi(u)$ ein algebraisches Additionstheorem besitzt, w. z. b. w.

XII. *Wenn eine analytische Function $\varphi(u)$ eine* ***charakteristische*** *Gleichung hat, so besitzt sie auch ein* ***algebraisches Additionstheorem.***

a) Wenn $u = 0$ für $\varphi(u)$ eine *reguläre* Stelle ist, so folgt die Wahrheit des Satzes sogleich aus den Sätzen X und XI. [W. 85].

b) Ist dagegen $u = 0$ für $\varphi(u)$ eine *singuläre* Stelle, so führen wir den Beweis folgendermassen.

Da die Function $\varphi(u)$, wie der Satz IV lehrt, in jedem endlichen Bereiche existiert und von algebraischem Charakter ist, so kann man stets eine endliche Zahl a so wählen, dass die Function sich an den *beiden* Stellen $u = a$ und $u = 2a$ *regulär* verhält.

Die Function $\psi(w)$, die wir durch

$$\varphi(a + w) = \psi(w) \quad (65)$$

definieren, ist also analytisch, verhält sich an der Stelle $w = 0$ *regulär* und besitzt (Satz III) sogar dieselbe charakteristische Gleichung wie $\varphi(u)$. Nach dem Beweise im Falle *a*) hier oben hat also die Function $\psi(w)$ ein algebraisches Additionstheorem:

Digitized by Google

$$F_1\Big(\psi(u')\ ,\ \psi(v')\ ,\ \psi(u'+v')\Big) = 0\ , \qquad (66)$$

worin, wenn man u' und v' auf eine hinlänglich kleine Umgebung der Stelle $w = 0$ beschränkt, $\psi(u')$ und $\psi(v')$ als einem und demselben eindeutigen Zweige angehörig angenommen werden dürfen, während $\psi(u'+v')$ unabhängig hiervon Werth eines beliebigen Zweiges sein darf.

Nach diesen Feststellungen können wir also in (66) Entwickelungen von der Form:

$$\psi(u') = \mathfrak{P}(u')\ ,\ \psi(v') = \mathfrak{P}(v')\ ,\ \psi(u'+v') = \mathfrak{P}(u'+v')$$

einführen, wenn zugleich — was erlaubt ist — $\psi(u'+v')$ als demselben eindeutigen Zweige wie $\psi(u')$ und $\psi(v')$ angehörig angenommen wird. Also haben wir in der genannten Umgebung der Stelle $w = 0$:

$$F_1\Big(\mathfrak{P}(u')\ ,\ \mathfrak{P}(v')\ ,\ \mathfrak{P}(u'+v')\Big) = 0\ . \qquad (67)$$

Werden hier $\mathfrak{P}(v')$ und $\mathfrak{P}(u'+v')$ — als Functionen von v' betrachtet — längs einem, offenbar stets zu Gebote stehenden, von $v' = 0$ zu $v' = a$ verlaufenden Wege analytisch fortgesetzt, so bleibt (67) für diese Fortsetzungen bestehen, und man erhält für alle Werthe u', v', die den Bedingungen

$$|u'| < \varrho\ ,\ |v' - a| < \varrho_1$$

genügen (ϱ und ϱ_1 sind gewisse positive Zahlen), ein Resultat von der Form:

$$F_1\Big(\mathfrak{P}(u')\ ,\ \psi_1(v')\ ,\ \psi_2(u'+v')\Big) = 0\ ,$$

welches, wenn $v' = a$ gesetzt wird, die Relation:

$$F_1\Big(\mathfrak{P}(u')\ ,\ b\ ,\ \psi_2(u'+a)\Big) = 0 \qquad (68)$$

ergiebt, weil $v = 2a$ für $\varphi(v)$ und folglich $v' = a$ für $\psi(v')$ eine reguläre Stelle, und also $\psi_1(a) = b$ eine bestimmte endliche Constante ist. Da (66) irreductibel ist, so kann (68) nicht identisch befriedigt sein unabhängig von den Werthen von $\mathfrak{P}(u')$ und $\psi_2(u'+a)$, sondern muss eine wirkliche Abhängigkeit zwischen diesen Grössen ausdrücken.

Digitized by Google

Wenn u und v in einer hinlänglich kleinen Umgebung der Stelle $w = a$ beliebig gewählt werden, so darf man in (67)

$$u' = u - a \ , \ v' = v - a$$

und in (68)

$$u' = u + v - 2a$$

setzen und erhält somit:

$$F_1\Big(\mathfrak{P}(u-a) \ , \ \mathfrak{P}(v-a) \ , \ \mathfrak{P}(u+v-2a)\Big) = 0 \ ,$$

$$F_1\Big(\mathfrak{P}(u+v-2a) \ , \ b \ , \ \psi_2(u+v-a)\Big) = 0 \ ,$$

wo $\mathfrak{P}(u+v-2a)$ in beiden Gleichungen wirklich vorkommt und selbstverständlich dieselbe Bedeutung hat. Man kann also diese Grösse eliminieren und erhält somit eine Relation von der Form:

$$F_2\Big(\mathfrak{P}(u-a) \ , \ \mathfrak{P}(v-a) \ , \ \psi_2(u+v-a)\Big) = 0 \ ,$$

d. h.

$$F_2\Big(\psi(u-a) \ , \ \psi(v-a) \ , \ \psi_2(u+v-a)\Big) = 0 \ ,$$

oder nach (65)

$$F_2\Big(\varphi(u) \ , \ \varphi(v) \ , \ \varphi_2(u+v)\Big) = 0 \ ,$$

die durch analytische Fortsetzungen offenbar beweist, dass die Function $\varphi(u)$ auch im hier betrachteten Falle ein algebraisches Additionstheorem besitzt, w. z. b. w.

Dass dieser Satz auch umgekehrt werden kann, wird im folgenden Satze bewiesen:

XIII. *Wenn eine analytische Function $\varphi(u)$ ein* ***algebraisches Additionstheorem*** *hat, so besitzt sie auch eine* ***charakteristische Gleichung.***

Der Annahme nach genügt $\varphi(u)$ einer irreductiblen algebraischen Gleichung:

$$G\Big(\varphi(u') \ , \ \varphi(v') \ , \ \varphi(u'+v')\Big) = 0 \ , \qquad (69)$$

Digitized by Google

wo die Werthe der Function beliebigen Zweigen angehören dürfen. Lässt man $\varphi(u')$ und $\varphi(v')$ demselben eindeutigen Zweige angehören, so darf man, wenn u und v beliebige endliche Grössen bedeuten,

$$u' = v' = \frac{u+v}{2}$$

setzen und erhält dadurch — weil (69) irreductibel ist — eine wirkliche Abhängigkeit:

$$\gamma\left(\varphi\left(\frac{u+v}{2}\right),\ \varphi(u+v)\right) = 0\,, \qquad (70)$$

wo $\gamma(\xi, \eta)$ eine ganze rationale Function von ξ und η ist, zwischen den beliebig zu wählenden Zweigen $\varphi\left(\frac{u+v}{2}\right)$ und $\varphi(u+v)$. Da ferner (69) die Gleichung:

$$G\left(\varphi(u)\ ,\ \varphi(v)\ ,\ \varphi(u+v)\right) = 0 \qquad (71)$$

ergiebt, wo ebenfalls die Zweige $\varphi(u)$, $\varphi(v)$, $\varphi(u+v)$ willkürlich gewählt werden dürfen, so ist es offenbar erlaubt anzunehmen, dass $\varphi(u+v)$ in (70) und (71) dieselbe Bedeutung hat. Alsdann kann man aber $\varphi(u+v)$ zwischen diesen Gleichungen eliminieren, was ein Resultat von der Form:

$$g\left(\varphi(u)\ ,\ \varphi(v)\ ,\ \varphi\left(\frac{u+v}{2}\right)\right) = 0$$

ergiebt, wo $g(\xi, \eta, \zeta)$ eine ganze rationale Function ihrer drei Argumente ist. Hieraus leuchtet die Wahrheit des Satzes sogleich ein.

Aus den bis hierher bewiesenen Sätzen ergeben sich mehrere Folgerungen, unter denen wir nur die folgenden hervorheben wollen.

XIV. *Es läuft genau auf dasselbe hinaus, von einer analytischen Function anzunehmen, dass sie eine* **charakteristische Gleichung,** *wie dass sie ein* **algebraisches Additionstheorem** *besitzt.*

XV. *Jede analytische Function, die eine* **charakteristische Gleichung** *besitzt, ist im* **eigentlichen** *Sinne des Wortes eine Function von* **algebraischem** *Charakter.*

Digitized by Google

XVI. *Jede* ***eindeutige*** *analytische Function* $\varphi(u)$, *die eine* ***charakteristische Gleichung*** *oder ein* ***algebraisches Additonstheorem*** *besitzt, ist überall im Endlichen von* ***rationalem*** *Charakter* [Satz 6].

Es erübrigt noch einige Sätze auseinanderzusetzen, die nebst der Function $\varphi(u)$ selbst auch noch ihre erste Ableitung enthalten.

XVII. *Wenn eine analytische Function* $\varphi(u)$ *ein* ***algebraisches Additionstheorem*** *hat, so besteht zwischen* $\varphi(u)$, $\varphi(v)$ *und deren ersten Ableitungen* $\varphi'(u)$, $\varphi'(v)$ *eine irreductible* ***algebraische Gleichung:***

$$g\left(\varphi(u)\ ,\ \varphi(v)\ ,\ \varphi'(u)\ ,\ \varphi'(v)\right) = 0\ , \qquad (72)$$

wo $g(\xi, \eta, \xi', \eta')$ *eine ganze rationale Function ihrer vier Argumente ist, deren Coefficienten von* u *und* v *unabhängig sind* [W. 85].

Führen wir in dem für $\varphi(u)$ geltenden algebraischen Additionstheoreme die Bezeichnungen:

$$\varphi(u) = x\ ,\ \varphi(v) = y\ ,\ \varphi(u+v) = z \qquad (73)$$

ein, so geht eine Gleichung hervor, die wir in der Form:

$$F = 0 \qquad (74)$$

schreiben können, wo

$$F = z^m + F_1(x, y)\, z^{m-1} + \ldots + F_m(x, y) \qquad (75)$$

ist, und $F_1, \ldots, F_m$ (im Allgemeinen gebrochene) rationale Functionen von x und y bedeuten, von denen einige (aber nicht alle) von x und y unabhängig sein können.

Werden u und v auf solche Bereiche beschränkt, dass für die Function $\varphi(w)$ nicht nur $w = u$ und $w = v$, sondern auch $w = u + v$ reguläre Stellen sind, so dürfen wir die Gleichung (74) partiell in Bezug auf u und v differentiieren und haben ausserdem

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial v}\ ,$$

vermittelst welcher Relation wir aus dem Differentiationsresultate:

Digitized by Google

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{dx}{du}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}=0\ ,\quad \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dv}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}=0$$

sogleich die Beziehung

$$\frac{\partial F}{\partial x}x'-\frac{\partial F}{\partial y}y'=0 \tag{76}$$

erhalten, wo der Kürze halber noch die Bezeichnungen:

$$\varphi'(u)=\frac{dx}{du}=x'\ ,\quad \varphi'(v)=\frac{dy}{dv}=y'$$

eingeführt worden sind.

Nach (75) reduciert sich die Gleichung (76) auf:

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}x'-\frac{\partial F_1}{\partial y}y'\right)z^{m-1}+\ldots+\left(\frac{\partial F_m}{dx}x'-\frac{\partial F_m}{\partial y}y'\right)=0\ . \tag{77}$$

Die linke Seite dieser Gleichung kann nicht *unabhängig von den Werthen der Grössen* x, y, x', y', z gleich Null sein, weil dies fordern würde, dass die Coefficienten $F_1,\ldots,F_m$ in (74) von x und y unabhängig sein müssten, was gegen die Voraussetzung verstösst, dass z in (74) mit $u+v$ veränderlich ist.

Wenn dagegen x, y, z *die Bedeutung* (73) *haben,* so *ist,* wie oben bewiesen, die Gleichung (77) *unabhängig von den Werthen von* u und v wirklich befriedigt.

Jetzt müssen folgende *zwei Fälle* unterschieden werden:

1) Wenn (77) eine *von* z *unabhängige* Gleichung enthält [z. B. wenn auf der linken Seite von (77) entweder z gar nicht vorkommt, oder diese Seite aus nur einem einzigen Gliede besteht, so dass die Gleichung nach Division mit einer passenden Potenz von z diese Grösse nicht mehr enthält]. Alsdann ergiebt sie eine Gleichung, die offenbar auf die Form:

$$g(x,\ y,\ x',\ y')=0 \tag{78}$$

gebracht werden kann und die für *alle* Werthe von u und v geltende Relation:

$$g\left(\varphi(u)\ ,\ \varphi(v)\ ,\ \varphi'(u)\ ,\ \varphi'(v)\right)=0 \tag{72}$$

Digitized by Google

beweist, während dagegen die Gleichung (78) nicht bestehen kann, wenn x, y, x', y' als von einander unabhängige Veränderliche betrachtet werden.

2) Wenn (77) eine Gleichung ergiebt, *in welcher z wirklich vorkommt.* Dann kann man zwischen (74) und (77) z eliminieren, wodurch wiederum Resultate von der Form (78) und (72) erhalten werden, die genau so wie oben aufzufassen sind.

Der Satz ist also bewiesen.

Bemerkung. Die folgende Bedeutung der Gleichung (78) verdient beachtet zu werden. *Wenn man sich die Gleichungen* (74) *und* (77) *als* ***vorgegeben*** *denkt, und* ***beide*** *z* ***enthalten,*** *so ist für* ***beliebige*** x, y, x', y' *die Gleichung* (78) ***die nothwendige und ausreichende Bedingung,*** *die unter diesen Grössen bestehen muss, damit* (74) *und* (77) *eine* ***gemeinsame*** *Wurzel z haben.* Wenn man dann die Gleichung (74) so auffasst, dass ihre linke Seite als ganze rationale Function nicht nur von z, x, y, sondern auch von x', y' (obgleich diese nicht explicite vorkommen) betrachtet wird, so ist also (78) eine hinreichende Bedingung dafür, dass (74) *reductibel ist.*

XVIII. *Wenn eine analytische Function* $\varphi(u)$ *einer irreductiblen* ***algebraischen Gleichung:***

$$g\Big(\varphi(u)\ ,\ \varphi(v)\ ,\ \varphi'(u)\ ,\ \varphi'(v)\Big) = 0 \qquad (72)$$

Genüge leistet, so besteht auch zwischen $\varphi(u)$ *und* $\varphi'(u)$ *eine* ***algebraische Gleichung:***

$$g_1\Big(\varphi(u)\ ,\ \varphi'(u)\Big) = 0\ , \qquad (79)$$

wo also $g_1(x, x')$ *eine ganze rationale Function ihrer beiden Argumente bedeutet, deren Coefficienten von u und v unabhängig sind* [W. 85].

Mit den im Beweise des vorigen Satzes benutzten Bezeichnungen besteht also die Gleichung:

$$g(x\ ,\ y\ ,\ x'\ ,\ y') = 0\ , \qquad (78)$$

Digitized by Google

die der Annahme nach nicht zerlegbar ist in Gleichungen von derselben Beschaffenheit. In entwickelter Form kann (78) geschrieben werden:

$$f_0(y, y') + f_1(y, y')\,x + f_2(y, y')\,x' + \ldots = 0\ , \qquad (80)$$

wo also die linke Seite eine ganze rationale Function von x und x' ist, deren Coefficienten ganze rationale Functionen von y und y' sind.

Es ist natürlich auch hier angenommen, dass $g(x, y, x', y')$ nicht gleich Null ist unabhängig von den Werthen von x, y, x', y'.

Wenn die linke Seite von (80) nur ein einziges Glied enthalten könnte, so müsste, da die Gleichung irreductibel ist, dieses Glied f_0 sein, so dass also (80) die Form:

$$f_0(y, y') = 0$$

haben und daher das Resultat:

$$f_0\big(\varphi(v)\ ,\ \varphi'(v)\big) = 0 \quad \text{und folglich} \quad f_0\big(\varphi(u)\,,\ \varphi'(u)\big) = 0$$

ergeben würde, was ja eine Beziehung (79) ist.

Wenn dagegen (80) mehrere Glieder wirklich enthält, so muss es in (80) mindestens zwei $f(y, y')$ geben, die nicht gleich Null sind unabhängig von den Werthen von y und y'. Da diese Functionen keinen gemeinsamen Theiler haben, so können sie entweder für kein Werthepaar y, y' oder nur für eine endliche Anzahl solcher Werthepaare gleichzeitig verschwinden, und folglich kann man stets im regulären Bereiche der Function $\varphi(v)$ einen Werth $v = v_0$ so wählen, dass die Functionen $f(y, y')$ für diesen Werth nicht gleichzeitig verschwinden. Für $v = v_0$ nimmt dann die Gleichung (72) die Gestalt (79) an, w. z. b. w.

Aus XVII und XVIII ergiebt sich unmittelbar der Satz:

> XIX. *Wenn eine analytische Function $\varphi(u)$ ein* **algebraisches Additionstheorem** *besitzt, so besteht* **zwischen der Function und ihrer ersten Ableitung** *$\varphi'(u)$ eine* **algebraische Gleichung,** *deren Coefficienten von dem Argumente u nicht abhängen* [W. 85].

Digitized by Google

Durch mehrmalige Differentiation und Elimination leitet man aus (79) ohne Schwierigkeit den Satz her:

XX. *Wenn eine analytische Function $\varphi(u)$ die Eigenschaft besitzt, dass* ***zwischen der Function und ihrer ersten Ableitung*** *eine algebraische Gleichung besteht, deren Coefficienten von dem Argumente unabhängig sind, so kann jede* ***höhere*** *Ableitung von $\varphi(u)$ als* ***rationale*** *Function von $\varphi(u)$ und $\varphi'(u)$ ausgedrückt werden* [W. 85].

Die Untersuchungen, die wir bis jetzt angestellt haben, sind so allgemein geführt, dass sie auch den Fall umfassen, wo $u = 0$ keine reguläre Stelle für die Function ist. Auch die folgenden Untersuchungen sollen eben so allgemein gehalten werden und folglich diesen Fall mit umfassen, was wir besonders hinsichtlich der nächstfolgenden Sätze hervorheben wollen. Wenn wir uns nämlich in den Sätzen, die von dem algebraischen Additionstheoreme handeln, mit der Annahme begnügt hätten, dass $u = 0$ für die Function eine reguläre Stelle ist, so würden wir diese Sätze nicht einmal auf die Function $\wp(u)$ anwenden dürfen.

XXI. *Wenn eine analytische Function $\varphi(u)$ ein* ***algebraisches Additionstheorem:***

$$z^m + F_1(x, y)\, z^{m-1} + \ldots + F_m(x, y) = 0 \qquad (74)$$

besitzt, wo

$$x = \varphi(u)\ ,\ y = \varphi(v)\ ,\ z = \varphi(u+v)\ , \qquad (73)$$

und wenn die aus (74) *hergeleitete Gleichung:*

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}x' - \frac{\partial F_1}{\partial y}y'\right) z^{m-1} + \ldots + \left(\frac{\partial F_m}{\partial x}x' - \frac{\partial F_m}{\partial y}y'\right) = 0 \qquad (77)$$

eine z wirklich enthaltende Gleichung ergiebt, so besteht zwischen $\varphi(u+v)$, $\varphi(u)$, $\varphi(v)$, $\varphi'(u)$, $\varphi'(v)$ eine ***algebraische Gleichung:***

$$\mathfrak{G}\left(\varphi(u+v)\ ,\ \varphi(u)\ ,\ \varphi(v)\ ,\ \varphi'(u)\ ,\ \varphi'(v)\right) = 0\ , \qquad (81)$$

Digitized by Google

deren Coefficienten von den Argumenten u, v nicht abhängen, und die in Bezug auf $\varphi(u+v)$ von niedrigerem Grade als das algebraische Additionstheorem ist [.W 85].

Nehmen wir zunächst nur an, dass die Gleichungen (74) und (77) gegeben sind, dass (77) z wirklich enthält, und dass die Grössen x, y, x', y' — übrigens beliebig — nur der einzigen Bedingung:

$$g(x, y, x', y') = 0 \qquad (78)$$

unterworfen sind, die durch Elimination von z zwischen (74) und (77) hervorgegangen ist. Alsdann haben die linken Seiten von (74) und (77) einen grössten gemeinsamen Theiler, der eine ganze rationale Function von z ist, deren Coefficienten rationale Functionen von x, y, x', y' sind. Wird dieser Theiler gleich Null gesetzt, so entsteht also eine Gleichung, deren sämmtliche Wurzeln genau die gemeinsamen Wurzeln z ausmachen, die die Gleichungen (74) und (77), wenn die Bedingung (78) erfüllt ist, besitzen. Diese Gleichung, die also eine nothwendige Folge aus dem gleichzeitigen Bestehen der drei Gleichungen (74), (77) und (78) ist, bringen wir auf die Form:

$$\mathfrak{G}(z, x, y, x', y') = 0 \ , \qquad (82)$$

wo die linke Seite eine ganze rationale Function ihrer Argumente z, x, y, x', y' ist, deren Coefficienten von diesen Argumenten nicht abhängen. Es leuchtet dann ohne Weiteres ein, dass der Grad der Gleichung (82) in Bezug auf z niedriger ist als der der Gleichung (74).

Lassen wir jetzt x, y, z die in (73) angegebenen Functionen bedeuten, wodurch also auch x' und y' Functionen bezw. von u und v werden, so *sind* die Gleichungen (74), (77) und (78) *wirklich erfüllt*, und besonders wird alsdann, weil x und x' (als Functionen einer und derselben Veränderlichen u) von einander abhängig sind, und ebenfalls y und y', die Gleichung (78) dem Satze XVIII gemäss durch die zwei Gleichungen:

$$g_1(x, x') = 0 \ , \quad g_1(y, y') = 0 \qquad (83)$$

ersetzt.

Die obige Schlussfolgerung ergiebt also, dass jetzt die Gleichung (82) erfüllt ist, d. h. dass aus der im Satze gemachten Annahme das Bestehen der Gleichung (81) sicher folgt, w. z. b. w.

Digitized by Google

Zu diesem Satze ist noch Folgendes zu bemerken. Da die Gleichung (78) im Allgemeinen nur die Existenz *einer* den Gleichungen (74) und (77) gemeinsamen Wurzel sichert, so wird also im Allgemeinen die Gleichung (82) in Bezug auf z vom *ersten* Grade sein. Dieser Umstand wurde von WEIERSTRASS so ausgesprochen, dass er den Fall, wo die Gleichung (81) die Form:

$$\varphi(u+v) = R\big(\varphi(u), \varphi(v), \varphi'(u), \varphi'(v)\big) \qquad (84)$$

hat, wobei unter $R(x, y, x', y')$ eine *rationale* Function ihrer vier Argumente verstanden wird, als den »gewöhnlichen» bezeichnete.

Natürlich ist hiermit die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, dass die Gleichung (82) von höherem als dem ersten Grade in Bezug auf z sein kann. Ausserdem verdient es bemerkt zu werden, dass die Gleichung (82), so lange x, y, x', y' nur der einzigen Bedingung (78) unterworfen werden, *irreductibel*, wenn aber die Bedingung (78) durch die speciellere (83) ersetzt wird, *reductibel* sein kann. Im letzteren Falle würde dann die Gleichung (81) reductibel sein; wenn dies aber zutrifft, soll stets angenommen werden, dass sie durch eine von der Function $\varphi(u)$ wirklich befriedigte *irreductible* Gleichung, die stets aus (81) zu erhalten ist, ersetzt worden ist. Infolge dessen nehmen wir ein für allemal an, dass *die Gleichung* (81) ***irreductibel** ist.*

Das folgende einfache Beispiel wird diese Einzelnheiten klar zum Vorschein kommen lassen.

Die Function:

$$\varphi(u) = \sin u$$

hat das algebraische Additionstheorem (74):

$$z^4 - 2(x^2 + y^2 - 2x^2y^2)z^2 + (x^2 - y^2)^2 = 0 \qquad (74)$$

und ergiebt also als Gleichung (77):

$$\big\{(1-2x^2)yy' - (1-2y^2)xx'\big\}z^2 + (x^2 - y^2)(xx' + yy') = 0\ . \qquad (77)$$

Eliminiert man z zwischen diesen Gleichungen, nachdem die erstere mit der zweiten Potenz des in (77) vorkommenden Coefficienten von z^2 multipliciert worden ist, so ergiebt sich ein Resultat, das sich,

Digitized by Google

wenn man die einzelnen Glieder nach den Potenzen und dem Producte der Grössen xx' und yy' ordnet, ohne Schwierigkeit auf die Form:

$$4x^2y^2(x^2-y^2)(x^2+y^2-1)\left\{(1-y^2)x'^2-(1-x^2)y'^2\right\}=0$$

bringen lässt und folglich als Gleichung (78) das Resultat:

$$(1-y^2)x'^2-(1-x^2)y'^2=0 \qquad (78)$$

ergiebt. Offenbar dürfen wir hier für einen Augenblick eine Hilfsgrösse t so einführen, dass wir

$$1-x^2=tx'^2\ ,\quad 1-y^2=ty'^2 \qquad (\alpha)$$

erhalten, woraus also einleuchtet, dass t als rationale Function von x^2 und x'^2 oder von y^2 und y'^2 aufgefasst werden kann.

Bringen wir jetzt die Gleichung (74) auf die Form:

$$\left\{z^2-x^2(1-y^2)-y^2(1-x^2)\right\}^2-4x^2y^2(1-x^2)(1-y^2)=0\ ,$$

so nimmt sie vermittelst (α) die Form:

$$\left\{z^2-t(yx'+xy')^2\right\}\left\{z^2-t(yx'-xy')^2\right\}=0\ , \qquad (\beta)$$

an, woraus also hervorgeht, dass die Bedingung (78) die Gleichung (74) *reductibel* macht, was wir zunächst nachweisen wollten.

Gehen wir jetzt zur Gleichung (77) über. Aus (α) erhalten wir:

$$1-2x^2=tx'^2-x^2\ ,\quad 1-2y^2=ty'^2-y^2$$

und folglich:

$$(1-2x^2)yy'-(1-2y^2)xx'=(xy+tx'y')(yx'-xy')\ , \qquad (\gamma)$$

$$x^2-y^2=x^2(y^2+ty'^2)-y^2(x^2+tx'^2)=-t(yx'+xy')(yx'-xy') \qquad (\delta)$$

und

$$xx'+yy'=xx'(y^2+ty'^2)+yy'(x^2+tx'^2)=(xy+tx'y')(yx'+xy')\ . \qquad (\varepsilon)$$

Vermittelst (γ), (δ), (ε) reduciert sich dann (77) auf die Form:

$$z^2-t(yx'+xy')^2=0\ , \qquad (\zeta)$$

Digitized by Google

welche, mit (β) verglichen, zeigt, dass (ζ) genau diejenigen Wurzeln ergiebt, die den Gleichungen (74) und (77) gemein sind, wenn die Bedingung (78) besteht. Da diese Bedingung *allein* nicht t als Quadrat einer rationalen Function von x, y, x', y' ergiebt, so ist *alsdann* die Gleichung (ζ) *irreductibel.* Wenn dagegen die Bedingung (78) durch die beiden Gleichungen (83) ersetzt wird, so wird (ζ) *reductibel*, und zwar in zwei irreductible Gleichungen zerlegbar. Um die eine der Gleichungen (83) zu erhalten, nehmen wir in (78) $v = 0$, d. h. $y = 0$, $y' = 1$, was $1 - x^2 = x'^2$ ergiebt. Die Gleichungen (83) werden also hier

$$1 - x^2 = x'^2 \ , \ 1 - y^2 = y'^2 \qquad (83)$$

und gehen offenbar aus (α) für $t = 1$ hervor. Die Gleichung (ζ) wird also, wenn die Gleichungen (83) gelten, die Gestalt:

$$\{z - (yx' + xy')\}\{z + (yx' + xy')\} = 0$$

annehmen, und hieraus geht schliesslich auch hervor, dass als die *irreductible* Gleichung (81) in unsrem Beispiele die Gleichung:

$$z - (yx' + xy') = 0 \ ,$$

d. h. die Relation:

$$\varphi(u + v) = \varphi(u)\varphi'(v) + \varphi(v)\varphi'(u)$$

erhalten wird, die ja bekanntlich für $\varphi(u) = \sin u$ gilt.

Im Satze XXI war unter Anderem angenommen, dass die Gleichung (77) keine von z freie Gleichung ergab. Wenn im Gegentheil diese Gleichung eine Relation ergiebt, die z *nicht* enthält, so kann man allerdings vermittelst dieser Relation keine Gleichung (81) erhalten, deren Grad in Bezug auf $\varphi(u+v)$ *niedriger* als m ist; aber es ist natürlich stets möglich, vermittelst der Bedingungen (83), d. h. vermittelst (79) das *algebraische Additionstheorem selbst* auf die Form (81) zu bringen, was jedoch in diesem Falle stets eine irreductible Gleichung ergiebt, deren Grad in Bezug auf $\varphi(u + v)$ *nie niedriger* als m sein kann. Oder: man kann die Möglichkeit einräumen, dass in der Gleichung (81) die Ableitungen $\varphi'(u)$, $\varphi'(v)$ nicht nothwendig explicite vorzukommen brauchen, und dass ihr Grad in Bezug auf $\varphi(u + v)$ nicht niedriger als m zu sein braucht. Dies läuft offenbar darauf hinaus, dass man *in dem Falle,* wo aus dem algebraischen Additionstheorem keine Gleichung (81),

Digitized by Google

deren Grad in Bezug auf $\varphi(u+v)$ niedriger als m ist, erhalten werden kann, *das algebraische Additionstheorem selbst* als Gleichung (81) auffasst Von diesem erweiterten Gesichtspunkte aus betrachtet lässt sich der Satz XXI ganz allgemein fassen, und zwar folgendermassen:

> XXI, a. *Jede analytische Function $\varphi(u)$, die ein* ***algebraisches*** *Additionstheorem hat, besitzt auch ein* ***»abgeleitetes»*** *Additionstheorem,*

wo wir uns der Kürze halber erlaubt haben, eine Gleichung von der Form (81) und von der oben näher besprochenen Beschaffenheit mit dem Namen »abgeleitetes Additionstheorem» zu belegen.[1]

Diejenigen analytischen Functionen, welche ein algebraisches Additionstheorem besitzen, zerfallen in zwei Klassen, je nachdem das *abgeleitete* Additionstheorem in Bezug auf $\varphi(u+v)$ *a*) vom *ersten*, *b*) von *höherem* als dem ersten *Grade* ist.

Da von dem abgeleiteten Additionstheorem in Bezug auf die Werthe von $\varphi(u+v)$ dasselbe gilt, was im Satze VIII von dem algebraischen bewiesen ist, so ergiebt sich aus den Sätzen IX und XVI sogleich das Resultat:

> XXII. *Wenn von einer analytischen Function $\varphi(u)$, die ein algebraisches Additionstheorem besitzt, gilt, dass ihr* ***abgeleitetes*** *Additionstheorem in Bezug auf $\varphi(u+v)$ vom* ***ersten*** *Grade ist, so ist die Function* ***eindeutig*** *und zwar hat sie dann überall im Endlichen den Charakter einer* ***rationalen*** *Function ihres Argumentes u* [W. 85].

Da wir — wie in der Vorbemerkung gesagt ist — die Untersuchung derjenigen mit einem algebraischen Additionstheoreme versehenen eindeutigen analytischen Functionen, die überall im Endlichen von *rationalem* Charakter sind, als vollständig erledigt vorausgesetzt haben, und wenn wir ausserdem den Satz XVI zu Hilfe nehmen, so ist auch die folgende Umkehrung des Satzes XXII als schon bewiesen zu betrachten:

---

[1] Bisweilen wird auch dieses Additionstheorem »algebraisch» genannt [Siehe z. B. *Theorie der Abel'schen Functionen von Dr. H. Stahl*, Leipzig 1896, Seite 5], was jedoch kaum zu empfehlen ist, da es die beiden Begriffe nicht streng unterscheidet.

Digitized by Google

XXIII. *Wenn eine* ***eindeutige*** *analytische Function* $\varphi(u)$ *ein* ***algebraisches Additionstheorem*** *besitzt, so hat sie die Eigenschaft, dass* $\varphi(u+v)$ ***rational*** *ausdrückbar ist durch* $\varphi(u)$, $\varphi(v)$, $\varphi'(u)$, $\varphi'(v)$, oder m. a. W. *dass ihr* ***abgeleitetes*** *Additionstheorem in Bezug auf* $\varphi(u+v)$ *vom* ***ersten*** *Grade ist.*

Die zwei letzten Sätze enthalten offenbar das Resultat, dass *die Gesammtheit* aller mit einem algebraischen Additionstheoreme versehenen analytischen Functionen $\varphi(u)$, deren *abgeleitetes* Additionstheorem in Bezug auf $\varphi(u+v)$ vom *ersten* Grade ist, *genau zusammenfällt* mit *der Gesammtheit* aller mit einem algebraischen Additionstheoreme versehenen analytischen Functionen, die ***eindeutig*** sind. Hiermit ist die obige Klasse *a*) erledigt, und hinsichtlich der Klasse *b*) folgt ohne Weiteres aus dem oben Gesagten die Wahrheit des Satzes:

XXIV. *Die Gesammtheit aller analytischen Functionen* $\varphi(u)$, *die ein algebraisches Additionstheorem besitzen und deren* ***abgeleitetes*** *Additionstheorem in Bezug auf* $\varphi(u+v)$ *von* ***höherem*** *als dem ersten Grade ist, fällt genau mit der Gesammtheit derjenigen mit einem algebraischen Additionstheoreme versehenen analytischen Functionen, die* ***mehrdeutig*** *sind, zusammen. Diese Functionen sind stets* ***endlich*** *mehrdeutig und im eigentlichen Sinne des Wortes von* ***algebraischem*** *Charakter.*

Als Beispiel einer solchen Function kann die zweideutige Function:

$$\varphi(u) = \sqrt{\cos u}$$

dienen, die das algebraische Additionstheorem:

$$z^4 - 2x^2y^2z^2 + x^4 + y^4 - 1 = 0$$

und das abgeleitete Additionstheorem:

$$z^2 - x^2y^2 + 4xyx'y' = 0$$

hat, wo wir die Ausdrücke:

$$x = \varphi(u)\ ,\ y = \varphi(v)\ ,\ z = \varphi(u+v) \qquad (73)$$

einzuführen haben.

Digitized by Google

XXV. *Wenn eine* ***r-deutige*** *analytische Function* $\varphi(u)$ *ein* ***algebraisches Additionstheorem*** *besitzt, so ist jede* ***symmetrische rationale*** *Function ihrer* r *eindeutigen Zweige:*

$$\varphi_1(u), \ldots, \varphi_r(u) \qquad (85)$$

eine eindeutige mit ***algebraischem Additionstheorem versehene*** *Function von* u*, die überall im Endlichen von* ***rationalem*** *Charakter ist.*

Der Annahme nach ist $\varphi(u)$ im eigentlichen Sinne des Wortes eine Function von *algebraischem* Charakter (Satz IX), und ihre r eindeutigen Zweige (85) bilden eine *einzige cyklische* Gruppe (Satz ℑ).

Bezeichnen wir mit

$$g\left(\varphi_1(u), \ldots, \varphi_r(u)\right)$$

eine beliebige symmetrische rationale Function der eindeutigen Zweige (85), so ist dieselbe eine eindeutige Function von u, die überall im Endlichen von *rationalem* Charakter ist (Satz 𝔊). Wird diese Function durch $R(u)$ bezeichnet, so haben wir also

$$R(u) = g\left(\varphi_1(u), \ldots, \varphi_r(u)\right). \qquad (86)$$

Da $\varphi(u)$ ein algebraisches Additionstheorem besitzt, so haben wir also nach dem Satze VIII:

$$G\left(\varphi_\lambda(u), \varphi_\mu(v), \varphi_\nu(u+v)\right) = 0, \qquad (87)$$

wo $G(x, y, z)$ eine ganze rationale Function von x, y, z ist, und λ, μ, ν unabhängig von einander alle Werthe $1, 2, \ldots, r$ annehmen dürfen.

Also haben wir zunächst nach (86) und (87):

$$R(u+v) = g\left(\varphi_1(u+v), \ldots, \varphi_r(u+v)\right),$$

$$G\left(\varphi_\lambda(u), \varphi_\mu(v), \varphi_1(u+v)\right) = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$G\left(\varphi_\lambda(u), \varphi_\mu(v), \varphi_r(u+v)\right) = 0,$$

Digitized by Google

die, wenn $\varphi_1(u+v), \ldots, \varphi_r(u+v)$ eliminiert werden, ein Resultat:

$$G_1\Big(\varphi_\lambda(u), \varphi_\mu(v), R(u+v)\Big) = 0 \qquad (88)$$

ergeben, wo G_1 eine ganze rationale Function von $\varphi_\lambda(u)$, $\varphi_\mu(v)$, $R(u+v)$ ist, und λ, μ wie oben gewählt werden dürfen.

Aus (86) und (88) erhalten wir in derselben Weise:

$$R(v) = g\Big(\varphi_1(v), \ldots, \varphi_r(v)\Big),$$

$$G_1\Big(\varphi_\lambda(u), \varphi_1(v), R(u+v)\Big) = 0,$$

. . . . . .

$$G_1\Big(\varphi_\lambda(u), \varphi_r(v), R(u+v)\Big) = 0,$$

die durch Elimination von $\varphi_1(v), \ldots, \varphi_r(v)$ eine Relation:

$$G_2\Big(\varphi_\lambda(u), R(v), R(u+v)\Big) = 0 \qquad (89)$$

ergeben.

Schliesslich erhalten wir aus (86) und (89):

$$R(u) = g\Big(\varphi_1(u), \ldots, \varphi_r(u)\Big),$$

$$G_2\Big(\varphi_1(u), R(v), R(u+v)\Big) = 0,$$

. . . . . .

$$G_2\Big(\varphi_r(u), R(v), R(u+v)\Big) = 0$$

und hieraus:

$$G\Big(R(u), R(v), R(u+v)\Big) = 0, \qquad (90)$$

wo $G(\xi, \eta, \zeta)$ eine ganze rationale Function ihrer drei Argumente bedeutet. Die Gleichung (90) enthält offenbar das zu beweisende Resultat.

Digitized by Google

Da dem Satze XVI gemäss jede *eindeutige* analytische Function, die ein algebraisches Additionstheorem besitzt, überall im Endlichen von *rationalem* Charakter ist, und da wir die Sätze über diejenigen mit einem algebraischen Additionstheoreme versehenen eindeutigen analytischen Functionen, die überall im Endlichen von rationalem Charakter sind, als vollständig erledigt angenommen haben, so ist also folgender Satz als schon bekannt und bewiesen zu betrachten:

XXVI. *Die nothwendige und ausreichende Bedingung dafür, dass eine* **eindeutige** *analytische Function* $\varphi(u)$ *ein* **algebraisches Additionstheorem** *besitzt, besteht darin, dass diese Function eine* **rationale** *Function ist entweder*

a) von dem **Argumente** u *, oder*

b) von einer **Exponentialfunction** $e^{\frac{u\pi i}{\omega}}$ *, oder*

c) von einer **doppelt periodischen** *Function* $\wp(u)$ *und von ihrer* **ersten Ableitung** $\wp'(u)$[1].

Jetzt sind wir im Stande, den folgenden allgemeinen Satz zu beweisen:

XXVII. *Die nothwendige und ausreichende Bedingung dafür, dass eine* **analytische** *Function* $\varphi(u)$ *ein* **algebraisches Additionstheorem** *besitzt, ist, dass diese Function eine* **algebraische** *Function ist entweder*

a) von dem **Argumente** u *, oder*

b) von einer **Exponentialfunction** $e^{\frac{u\pi i}{\omega}}$ *, oder*

c) von einer **doppelt periodischen** *Function* $\wp(u)$ *und von ihrer* **ersten Ableitung** $\wp'(u)$[2].

Dem vorigen Satze zufolge brauchen wir nur den Fall zu behandeln, dass die Function $\varphi(u)$ mehrdeutig ist. Die Bedingung ist zunächst *nothwendig;* denn wenn die analytische Function $\varphi(u)$ ein algebraisches Additionstheorem hat, so ist sie von *algebraischem* Charakter (im eigentlichen Sinne des Wortes). Ihr Mehrdeutigkeitsgrad sei mit r, und ihre r eindeutigen Zweige, die offenbar eine einzige cyklische Gruppe bilden, seien mit $\varphi_1(u), \ldots, \varphi_r(u)$ bezeichnet. Alsdann ist die Function durch die Gleichung:

---

[1] Schwarz, Formeln und Lehrsätze etc., Art. 2.

[2] Ibidem, Art. 1.

Digitized by Google

$$\{\varphi(u) - \varphi_1(u)\} \ldots \{\varphi(u) - \varphi_r(u)\} = 0$$

genau definiert, die auf die Form:

$$\varphi^r(u) + g_1 \varphi^{r-1}(u) + \ldots + g_r = 0 \qquad (91)$$

gebracht werden kann, wo die Coefficienten $g_1, \ldots, g_r$ *symmetrische* ganze rationale Functionen von $\varphi_1(u), \ldots, \varphi_r(u)$ und folglich (Satz 5), als Functionen von u betrachtet, überall im Endlichen von *rationalem* Charakter sind. Dem Satze XXV zufolge haben sie auch algebraisches Additionstheorem. Der Gleichung (91) geben wir daher lieber die Form:

$$\varphi^r(u) + R_1(u)\varphi^{r-1}(u) + \ldots + R_r(u) = 0 \ , \qquad (92)$$

wo also

$$R_\lambda(u) = g_\lambda\big(\varphi_1(u), \ldots, \varphi_r(u)\big) \qquad (93)$$

und

$$G_\lambda\big(R_\lambda(u), R_\lambda(v), R_\lambda(u+v)\big) = 0 \ .$$

Jetzt müssen wir folgende Fälle unterscheiden.

a) Wenn die Function $\varphi(u)$ *nicht periodisch* ist. Die Relationen (93) zeigen alsdann, dass auch die Functionen $R_\lambda(u)$ nicht periodisch sind. Da sie aber mit algebraischem Additionstheorem versehen und überall im Endlichen von rationalem Charakter sind, so sind sie *rationale* Functionen von u (Satz XXVI, *a*). Also hat die Gleichung (92) jetzt die in XXVII *a*) angegebene Form.

b) Wenn dagegen $\varphi(u)$ *periodisch* ist, so folgt aus (93), dass jede Periode von $\varphi(u)$ auch Periode von den Functionen $R(u)$ ist.

b, 1) Wenn dann zunächst $\varphi(u)$ *einfach* periodisch ist, so sind auch die $R_\lambda(u)$ einfach periodisch, und da sie eindeutig und analytisch sind und algebraisches Additionstheorem besitzen, so sind sie *rationale* Functionen von einer Exponentialfunction $e^{\frac{u\pi i}{\omega}}$ (Satz XXVI, *b*), und die Gleichung (92) hat die in XXVII, *b*) angegebene Form.

b, 2) Ist schliesslich $\varphi(u)$ *mehrfach* periodisch, so sind auch nach (93) die $R_\lambda(u)$ mehrfach periodisch. Da sie aber *eindeutig* und *analytisch* sind, so können sie nicht mehr als doppelt periodisch sein. Es giebt also ein Periodenpaar von $\varphi(u)$ von der Beschaffenheit, dass (Satz XXVI, *c*), die $R_\lambda(u)$ *rationale* Functionen sind von derjenigen Function

Digitized by Google

$\wp(u)$, für die dieses Periodenpaar ein primitives ist, und von ihrer ersten Ableitung $\wp'(u)$. Also hat jetzt die Gleichung (92) die in XXVII, *c*) angegebene Form

Die Bedingung ist also als *nothwendig* erwiesen. Dass sie aber auch *ausreichend* ist, geht leicht folgendermassen hervor. [W. 85]. Da es eine einfach periodische und eine nicht periodische Ausartung von der doppelt periodischen Function $\wp(u)$ giebt, vermittelst deren die Fällen *a*) und *b*) in den Fall *c*) mit eingeschlossen werden, so lässt sich der Beweis folgendermassen mit einem Male führen.

Nehmen wir nämlich an, dass $\varphi(u)$ eine algebraische Function von $\wp(u)$ und $\wp'(u)$ ist, d. h. dass eine Gleichung:

$$G\Big(\varphi(u)\,,\ \wp(u)\,,\ \wp'(u)\Big) = 0$$

besteht, wo G eine ganze rationale Function von φ, $\wp$ und $\wp'$ ist. Ferner besteht bekanntlich zwischen $\wp(u)$ und $\wp'(u)$ die algebraische Gleichung:

$$\wp'^2(u) = 4\wp^3(u) - g_2\wp(u) - g_3\ ,$$

und folglich ergeben diese Gleichungen eine Relation:

$$G_1\Big(\varphi(u)\,,\ \wp(u)\Big) = 0\ ,$$

wo G_1 eine ganze rationale Function von φ und $\wp$ ist.

Es bestehen also Gleichungen von der Form:

$$G_1\Big(\varphi(u)\,,\ \wp(u)\Big) = 0\ ,\ G_1\Big(\varphi(v)\,,\ \wp(v)\Big) = 0\ ,\ G_1\Big(\varphi(u+v)\,,\ \wp(u+v)\Big) = 0\ ,$$

welche, mit dem für $\wp(u)$ geltenden algebraischen Additionstheorem:

$$g\Big(\wp(u+v)\,,\ \wp(u)\,,\ \wp(v)\Big) = 0$$

vereinigt, ein Resultat von der Gestalt:

$$\mathfrak{G}\Big(\varphi(u)\,,\ \varphi(v)\,,\ \varphi(u+v)\Big) = 0$$

ergeben, welches die Behauptung beweist.

Bemerkung. Aus dem algebraischen Additionstheoreme haben wir das Bestehen sowohl vom abgeleiteten Additionstheoreme wie von einer algebraischen Gleichung zwischen der Function und ihrer ersten

Digitized by Google

Ableitung hergeleitet. Umgekehrt lässt sich auch beweisen, dass *eine analytische Function ein algebraisches Additionstheorem besitzt, jedesmal wenn sie mit einem abgeleiteten Additionstheorem versehen ist, und zugleich eine algebraische Gleichung zwischen ihr und ihrer ersten Ableitung besteht.* Dies geht nämlich sogleich hervor, wenn man zwischen den Gleichungen (82) und (83) die Grössen x' und y' eliminiert.

Dagegen lässt sich *bloss* aus dem Bestehen des *abgeleiteten* Additionstheoremes — nämlich wenn dieses $\varphi'(u)$ und $\varphi'(v)$ wirklich enthält — die Geltung des *algebraischen* nicht folgern; denn aus der blossen Gleichung (81) kann man keine Gleichung von der Form (79) herleiten. Was man aber hier anstatt einer Gleichung von der Form (79) wirklich erhalten kann, wollen wir jetzt erörtern, wobei wir uns jedoch auf die Annahme beschränken, dass das abgeleitete Additionstheorem vom ersten Grade in Bezug auf $\varphi(u+v)$ ist, obgleich die Untersuchung auch im allgemeinen Falle mit denselben Hilfsmitteln ausführbar ist.

Es sei also hier angenommen, dass eine analytische Function $\varphi(u)$ einer Gleichung:

$$\varphi(u+v) = R\big(\varphi(u),\ \varphi(v),\ \varphi'(u),\ \varphi'(v)\big) \qquad (84)$$

genügt, welche Annahme analogerweise erklärt sein soll wie bei dem algebraischen Additionstheoreme und auch hier[1] den Schluss zu ziehen erlaubt, dass es eine endliche Zahl a giebt von der Beschaffenheit, dass die Stellen $u = a$ und $u = 2a$ *regulär* sind für die Function $\varphi(u)$, und dass es zwei Potenzreihen:

$$\mathfrak{P}_1(u-a) \text{ und } \mathfrak{P}_2(u-2a)$$

giebt, welche Elemente der Function $\varphi(u)$ sind und die Eigenschaft besitzen, dass (84) durch

$$\varphi(u) = \mathfrak{P}_1(u-a),\ \varphi(v) = \mathfrak{P}_1(v-a),\ \varphi(u+v) = \mathfrak{P}_2(u+v-2a) \qquad (94)$$

befriedigt wird, so lange u und v diese Reihen convergent machen, was sicher der Fall sein wird, wenn u und v einer Bedingung von der Form:

$$|u-a| < \varrho\ ,\ |v-a| < \varrho \qquad (95)$$

unterworfen werden, wo ϱ eine passend gewählte reelle positive Zahl ist.

[1] Man vergleiche die Untersuchung vor dem Satze VI.

Digitized by Google

Alsdann gilt der Satz:

XXVIII. *Wenn eine analytische Function $\varphi(u)$ die Eigenschaft besitzt, dass $\varphi(u+v)$ eine* ***rationale*** *Function von den Werthen:*

$$\varphi(u)\ ,\ \varphi(v)\ ,\ \varphi'(u)\ ,\ \varphi'(v)$$

ist, so ist auch $\varphi'(u+v)$ ***rational*** *durch dieselben Grössen ausdrückbar, und ausserdem lässt sich $\varphi''(u)$ als* ***rationale*** *Function von $\varphi(u)$ und $\varphi'(u)$ darstellen.*

Das letzte Resultat ist also hier an die Stelle des im Satze XIX gefolgerten getreten. Den Beweis führen wir folgendermassen.

Benutzen wir, wie bei einer früheren Gelegenheit, die Bezeichnungen:

$$\varphi(u) = x\ ,\ \varphi(v) = y\ ,\ \varphi(u+v) = z\ ,$$

so nimmt (84) die Form:

$$z = R(x, y, x', y') \tag{96}$$

an. Lassen wir u und v dem Bereiche (95) angehören und x, y, z den Gleichungen (94) gemäss erklärt sein, so ergiebt (96) durch partielle Differentiation nach u und v

$$z' = \frac{\partial R}{\partial x}x' + \frac{\partial R}{\partial x'}x''\ ,\ z' = \frac{\partial R}{\partial y}y' + \frac{\partial R}{\partial y'}y''\ , \tag{97}$$

weil dann

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial v} = z' = \mathfrak{P}'_2(u+v-2a)\ .$$

Aus (97) erhalten wir im Bereiche (95)

$$\frac{\partial R}{\partial x}x' + \frac{\partial R}{\partial x'}x'' = \frac{\partial R}{\partial y}y' + \frac{\partial R}{\partial y'}y''\ ,$$

welche Gleichung, da u und v von einander unabhängig sind, für einen Werth $v = v_0$, dem solche Werthe y und y' entsprechen, für welche die partiellen Ableitungen von R endliche Werthe haben und $\frac{\partial R}{\partial x'}$ nicht

Digitized by Google

unabhängig von x und x' verschwindet, eine Relation von der Form:

$$x'' = \overline{R}(x, x') \text{ , d. h. } \varphi''(u) = \overline{R}\Big(\varphi(u) , \varphi'(u)\Big) \qquad (98)$$

ergiebt. Hiermit ist also der letzte Theil des Satzes bewiesen.

Die erste der Gleichungen (97) lässt sich vermittelst (98) auf die Form:

$$z' = R_1(x, y, x', y') ,$$

d. h.

$$\varphi'(u+v) = R_1\Big(\varphi(u), \varphi(v), \varphi'(u), \varphi'(v)\Big) \qquad (99)$$

bringen, und somit ist der Satz vollständig bewiesen, wenn man nur beachtet, dass, wie gewöhnlich, von dem Gültigkeitsbereich der Relationen (98) und (99) durch analytische Fortsetzung bewiesen werden kann, dass er mit dem Existenzbereiche der Function $\varphi(u)$ zusammenfällt.

Setzen wir

$$\varphi(a+u') = \psi(u') , \qquad (100)$$

so ist $u' = 0$ *eine reguläre Stelle für die Function* $\psi(u')$. In der Umgebung: $|u'| < \rho$ dieser Stelle ist nach (94) ein Element von $\psi(u')$ durch

$$\psi(u') = \mathfrak{P}_1(u') \qquad (101)$$

gegeben. Wir wollen jetzt beweisen, dass *die Function* $\psi(u')$ *ein* ***abgeleitetes*** *Additionstheorem besitzt, und dass darin, wenn* u' *und* v' *im Bereiche:*

$$|u'| < \frac{1}{2}\rho , \quad |v'| < \frac{1}{2}\rho \qquad (102)$$

gelegen sind, $\psi(u')$, $\psi(v)$, $\psi(u'+v')$ *beziehungsweise durch* $\mathfrak{P}_1(u')$, $\mathfrak{P}_1(v')$, $\mathfrak{P}_1(u'+v')$ *ersetzt werden dürfen.*

Denn im Bereiche (95) haben wir nach (84), (94) und (99) die Identitäten:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{P}_2(u+v-2a) &= R\Big(\mathfrak{P}_1(u-a) , \mathfrak{P}_1(v-a) , \mathfrak{P}'_1(u-a) , \mathfrak{P}'_1(v-a)\Big), \\ \mathfrak{P}'_2(u+v-2a) &= R_1\Big(\mathfrak{P}_1(u-a) , \mathfrak{P}_1(v-a) , \mathfrak{P}'_1(u-a) , \mathfrak{P}'_1(v-a)\Big). \end{aligned}\right\} (103)$$

Digitized by Google

Gehören u' und v' dem Bereiche (102) an, so bleibt jede der Gleichungen (103) bestehen sowohl für

$$u = a + u' \quad , \quad v = a + v'$$

als auch für

$$u = a + u' + v' \quad , \quad v = a \; .$$

Da $u + v - 2a$ für diese beiden Substitutionen denselben Werth $u' + v'$ erhält, so ergiebt die erste der Gleichungen (103) die Relation:

$$R\Big(\mathfrak{P}_1(u' + v') \; , \; \mathfrak{P}_1(0) \; , \; \mathfrak{P}'_1(u' + v') \; , \; \mathfrak{P}'_1(0)\Big) =$$

$$= R\Big(\mathfrak{P}_1(u') \; , \; \mathfrak{P}_1(v') \; , \; \mathfrak{P}'_1(u') \; , \; \mathfrak{P}'_1(v')\Big) \; , \qquad (104)$$

und die zweite eine analoge, die aus (104) hervorgeht, indem man R in R_1 ändert. Wird schliesslich zwischen diesen Relationen die Grösse $\mathfrak{P}'_1(u' + v')$ eliminiert, so geht eine Gleichung hervor, die offenbar auf die Form:

$$G\Big(\mathfrak{P}_1(u' + v') \; , \; \mathfrak{P}_1(u') \; , \; \mathfrak{P}_1(v') \; , \; \mathfrak{P}'_1(u') \; , \; \mathfrak{P}'_1(v')\Big) = 0 \quad (105)$$

gebracht werden kann und vermittelst (101) ohne Schwierigkeit das zu beweisende Resultat:

$$G\Big(\psi(u' + v') \; , \; \psi(u') \; , \; \psi(v') \; , \; \psi'(u') \; , \; \psi'(v')\Big) = 0 \qquad (106)$$

ergiebt.

Setzt man in (105) $v' = u'$ und bezeichnet mit $\bar{\varrho}$ den wahren Convergenzradius der Reihe $\mathfrak{P}_1(u')$, so erhält man, wenn auch statt u' $\frac{u'}{2}$ gesetzt wird:

$$G_1\Big(\mathfrak{P}_1(u') \; , \; \mathfrak{P}_1\Big(\frac{u'}{2}\Big) \; , \; \mathfrak{P}'_1\Big(\frac{u'}{2}\Big)\Big) = 0 \qquad (107)$$

für

$$|u'| < \bar{\varrho} \; .$$

Digitized by Google

Setz man hier wiederum statt $u' \frac{u'}{2}$, so ergiebt sich:

$$G_1\left(\mathfrak{P}_1\left(\frac{u'}{2}\right), \mathfrak{P}_1\left(\frac{u'}{2^2}\right), \mathfrak{P}'_1\left(\frac{u'}{2^2}\right)\right) = 0 \qquad (108)$$

für

$$|u'| < 2\bar{\varrho} .$$

Differentiiert man diese Relation und benutzt die aus (98) hervorgehende Beziehung:

$$\mathfrak{P}''_1\left(\frac{u'}{2^2}\right) = \overline{R}\left(\mathfrak{P}_1\left(\frac{u'}{2^2}\right), \mathfrak{P}'_1\left(\frac{u'}{2^2}\right)\right), \qquad (109)$$

$$|u'| < 2^2\bar{\varrho}$$

so ergiebt sich ein Resultat von der Form:

$$\overline{G}_1\left(\mathfrak{P}_1\left(\frac{u'}{2}\right), \mathfrak{P}'_1\left(\frac{u'}{2}\right), \mathfrak{P}_1\left(\frac{u'}{2^2}\right), \mathfrak{P}'_1\left(\frac{u'}{2^2}\right)\right) = 0 , \qquad (110)$$

$$|u'| < 2\bar{\varrho}$$

und wenn man zwischen (107), (108) und (110) die Grössen $\mathfrak{P}_1\left(\frac{u'}{2}\right)$, $\mathfrak{P}'_1\left(\frac{u'}{2}\right)$ eliminiert, so geht eine Relation von der Form:

$$G_2\left(\mathfrak{P}_1(u'), \mathfrak{P}_1\left(\frac{u'}{2^2}\right), \mathfrak{P}'_1\left(\frac{u'}{2^2}\right)\right) = 0 \qquad (111)$$

$$|u'| < \varrho$$

hervor.

Die Gleichungen (107) und (111) weisen auf ein allgemeines Resultat von der Form:

$$G_n\left(\mathfrak{P}_1(u'), \mathfrak{P}_1\left(\frac{u'}{2^n}\right), \mathfrak{P}'_1\left(\frac{u'}{2^n}\right)\right) = 0 \qquad (112)$$

$$|u'| < \varrho$$

hin, wo n irgend welche ganze positive Zahl bedeutet; und es ist in der That sehr leicht, die allgemeine Gültigkeit von (112) nachzuweisen.

Digitized by Google

indem man nämlich annimmt, dass diese Gleichung für eine beliebige ganze positive Zahl n bewiesen ist, und daraus herleitet, dass sie auch bestehen bleibt, wenn n in $n+1$ geändert wird. Dies geschieht ganz einfach dadurch, dass man aus (112) die Grössen $\mathfrak{P}_1\left(\frac{u'}{2^n}\right)$ und $\mathfrak{P}'_1\left(\frac{u'}{2^n}\right)$ wegschafft vermittelst derjenigen Gleichung, die aus (107) hervorgeht, wenn darin statt u' $\frac{u'}{2^n}$ geschrieben wird, und derjenigen, die aus dieser neuen Gleichung durch Differentiation und Elimination von $\mathfrak{P}''_1\left(\frac{u'}{2^{n+1}}\right)$ mit Hilfe von (98) erhalten wird. Also ist eine Relation von der Form (112) *für jede ganze positive Zahl n* gültig, und hieraus ergiebt sich ein wichtiges Resultat, das im folgenden Satze ausgesprochen ist.

> XXIX. *Jede analytische Function $\varphi(u)$, die die Eigenschaft besitzt, dass $\varphi(u+v)$ als* **rationale** *Function von $\varphi(u)$, $\varphi(v)$, $\varphi'(u)$ und $\varphi'(v)$ ausdrückbar ist, ist eine* **überall im Endlichen** *existierende eindeutige Function, die auch überall daselbst den Charakter einer* **rationalen** *Function besitzt*[1].

Wenn nämlich R eine beliebig grosse endliche reelle positive Zahl ist, so kann die ganze positive Zahl n stets so gewählt werden, dass man

$$2^n\overline{\varrho} > R \tag{113}$$

hat. Setz man dann

$$x_n = \mathfrak{P}_1\left(\frac{u'}{2^n}\right), \quad x'_n = \mathfrak{P}'_1\left(\frac{u'}{2^n}\right), \tag{114}$$

so bedeuten x_n und x'_n gewöhnliche Potenzreihen von u', die im ganzen Bereiche:

$$|u'| \leq R \tag{115}$$

sicher convergieren. Setzt man ferner in (112) statt $\mathfrak{P}_1(u')$ z, so kann diese Gleichung geschrieben werden:

$$g_0(x_n, x'_n)z^\lambda + g_1(x_n, x'_n)z^{\lambda-1} + \ldots + g_\lambda(x_n, x'_n) = 0, \tag{116}$$

[1]) Formeln und Lehrsätze, Art. 2.

Digitized by Google

wo λ ihr Grad in Bezug auf z ist, und die Coefficienten $g(x_n, x'_n)$ im ganzen Bereiche (115) als gewöhnliche Potenzreihen von u' darstellbar sind. Wie bei früheren Gelegenheiten dürfen wir auch hier annehmen, dass die also in der Form:

$$P_0(u')z^\lambda + P_1(u')z^{\lambda-1} + \ldots + P_\lambda(u') = 0$$

geschriebene Gleichung (116) im ganzen Bereiche (115) irreductibel oder sonst durch eine solche ersetzt worden ist.

Da diese Gleichung im kleineren Bereiche: $|u'| < \bar{\varrho}$ durch

$$z = \mathfrak{P}_1(u')$$

befriedigt ist, so sieht man durch analytische Fortsetzung ein, dass die aus $\mathfrak{P}_1(u')$ im ganzen Bereiche (115) sich ergebende analytische Functionsbestimmung überall daselbst nicht nur dieser Gleichung Genüge leistet, sondern auch von algebraischem Charakter ist.

Da $\mathfrak{P}_1(u')$ ein Element von der analytischen Function $\psi(u')$ ist und da R beliebig gross gewählt werden konnte, so ist also $\psi(u')$ in *jedem* endlichen Bereiche von *algebraischem* Charakter. *Dasselbe gilt also* wegen

$$\varphi(u) = \psi(u - a)$$

auch von der Function $\varphi(u)$.

Durch Ueberlegungen, die den bei den Sätzen VIII und IX benutzten ganz analog sind, ergiebt sich schliesslich aus der hier geltenden Gleichung (84), dass $\varphi(u)$ auch *eindeutig* und folglich überall im Endlichen von *rationalem* Charakter ist, w. z. b. w.

Schlussbemerkung. Man sieht aus den letzten Untersuchungen sofort ein, dass der Begriff des *abgeleiteten* Additionstheorems dahin erweitert werden kann, dass man eine algebraische Gleichung zwischen $\varphi(u+v)$, $\varphi(u)$, $\varphi'(u), \ldots, \varphi^{(r)}(u)$, $\varphi(v)$, $\varphi'(v), \ldots, \varphi^{(r)}(v)$ ein abgeleitetes Additionstheorem *r:ter Ordnung* nennt.

Für eine analytische Function, die ein solches Additionstheorem besitzt, können Resultate, die den obigen ziemlich analog sind, ohne Schwierigkeit mit ungefär denselben Hilfsmitteln erhalten werden.

Ohne auf die Auseinandersetzung dieser Resultate hier näher eingehen zu wollen, erlaube ich mir jedoch den folgenden Satz auszusprechen.

Digitized by Google

Jede analytische Function $\varphi(u)$, die ein abgeleitetes Additionstheorem beliebiger Ordnung besitzt, welches in Bezug auf $\varphi(u+v)$ vom ***ersten*** *Grade ist, ist eine* ***überall im Endlichen*** *existierende eindeutige Function, die auch* ***überall*** *daselbst den Charakter einer* ***rationalen*** *Function besitzt.*

In diesem Satze ist offenbar der Satz XXIX als specieller Fall enthalten.

Als Beispiel hiervon führen wir die Function:

$$\varphi(u) = \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}$$

an, welche das abgeleitete Additionstheorem *zweiter* Ordnung:

$$\varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v) + \frac{1}{2}\frac{\varphi''(u) - \varphi''(v)}{\varphi'(u) - \varphi'(v)} \qquad (117)$$

besitzt[1] und folglich nach dem obigen Satze überall im Endlichen von rationalem Charakter ist.

Da ferner

$$\varphi'^2(u) + 4\varphi'^3(u) - g_2\varphi'(u) + g_3 = 0$$

ist[2], so ergiebt sich aus (117) für diese Function $\varphi(u)$ auch ein abgeleitetes Additionstheorem *erster* Ordnung, das jedoch in Bezug auf $\varphi(u+v)$ von höherem als dem ersten Grade ist.

Diese Function $\varphi(u)$ ist uns hier von Interesse, weil sie die auf der Seite 71 ausgesprochene Behauptung bestätigt, dass man *aus dem Bestehen eines* ***abgeleiteten*** *Additionstheorems* ***nicht*** *schliessen darf, dass die Function ein* ***algebraisches*** *besitzt.* Denn wenn diese $\varphi(u)$ ein algebraisches *Additionstheorem* besässe, so würde sich daraus (Satz XIX) ergeben, dass eine *algebraische* Gleichung zwischen der *nicht periodischen* Function $\varphi(u)$ und der *periodischen* $\varphi'(u)$ bestände, was ja offenbar unmöglich ist.

[1] Formeln und Lehrsätze, Art. 11, Gleichung (4) und Art. 9, Gleichung (1).

[2] Formeln und Lehrsätze, Art. 9, Gleichung (14).

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google